PERIODICO

DI

MATEMATICA

PER

L'INSEGNAMENTO SECONDARIO

fondato da D. BESSO, continuato da A. LUGLI

ED ATTUALMENTE DIRETTO

DAL

PROF. G. LAZZERI

SERIE III — VOLUME III

ANNO XXI

LIVORNO

TIPOGRAFIA RAFFAELLO GIUSTI

—

1906

INDICE

SERIE III - VOLUME III - ANNO XXI

ANNO XXI — LUGLIO-AGOSTO 1905 — FASC. I

PERIODICO DI MATEMATICA

PER

L'INSEGNAMENTO SECONDARIO

fondato da DAVIDE BESSO, continuato da AURELIO LUGLI

ED ATTUALMENTE DIRETTO

DAL

PROF. GIULIO LAZZERI

SERIE III — VOLUME III

SOMMARIO:

LIVORNO

TIPOGRAFIA DI RAFFAELLO GIUSTI

1905

LIBRI ED OPUSCOLI RICEVUTI DALLA DIREZIONE.

AGUGLIA. — *Sulla superficie luogo di un punto in cui le superficie di tre fasci toccano una medesima retta.* (Rend. del Circolo Matematico di Palermo, 1905.)

ANDREINI. — *Intorno ad un corso di geografia matematica.* (" Opinione geografica „ Anno I, 1905.)

— — *Il calendario russo secondo una recente proposta di riforma ed il suo confronto coi calendari giuliano e gregoriano.* (Rivista geografica italiana, 1905).

ARRÒ. — *L'opzione tra il greco e la matematica nei Licei e la riforma delle scuole secondarie.* (Biblioteca delle scuole italiane, Anno 11, n. 13. Napoli.)

ARZELÀ. — *Trattato di algebra elementare* ad uso dei Licei ed Istituti tecnici. Parte II, 3ª edizione completamente rifatta. Firenze, Succ. Le Monnier, 1905.

— — *Sulle serie di funzioni.* Parte I. Deutsch bearbeitet von J. T. *Pohl.* und Br. Rauchegger. (Monatshefte für Math. und Pysik, 1905.)

BAFFI. — *Sulle generazioni dei complessi tetraedrali.* Bologna, Cuppini, 1905.

BARBIERI. — *Alcuni teoremi sulle funzioni semicontinue, e sulle funzioni di una variabile, limiti di funzioni di due variabili reali.* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1905.)

— — *Alcuni teoremi sulle funzioni di variabile reale.* (Atti della Soc. dei Naturalisti e Matematici di Modena, 1905.)

BIASI. — *Sulla divisibilità dei numeri.* (Bollettino di matematica, 1905.)

BURGATTI. — *Sopra certi sistemi completi di equazioni a derivate parziali di* 2° *e* 1° *ordine.* (Rendiconti del R. Ist. Lombardo di Scienze e Lettere, 1905.)

BUSTELLI. — *Elementi di filosofia matematica nei riguardi didascalici* con prefazione di V. CERRUTI

Fascicolo I. — *Prolegomeni*

„ II.. — *Appunti di logica matematica.*

(Roma, Società editrice Dante Alighieri, 1905.)

CAPELLI. — *Sull'arbitrarietà delle caratteristiche nelle formole di addizione delle funzioni* ϑ *di una variabile.* (Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, 1905.)

— — *Sulle progressioni infinite di numeri reali.* Nota II. (Rendiconti della R. Acc. delle Scienze di Napoli, 1905.)

CASTELNUOVO. — *Lezioni di Geometria analitica e proiettiva.* Vol. II. *(Geometria analitica dello spazio. Superficie di secondo ordine).* (Roma-Milano, Società editrice Dante Alighieri, 1905).

DEL RE. — *Sulle quattro rotazioni che sovrappongono un triedro trirettangolo ad un altro triedro trirettangolo e sulla Astatica nei metodi della Geometria descrittiva* (Rendiconti della R. Acc. delle Scienze Fisiche e Matem. di Napoli, 1905.)

GIGLI. — *La matematica nei Licei.* (Rivista d'Italia, 1905.)

LORIA. — *Programmi del passato e programmi per l'avvenire.* (Rivista Ligure, 1905).

MARLETTA. — *Studio geometrico della quartica gobba razionale.* (Annali di Matematica pura ed applicata, 1902.)

— — *Sulla proiezione quotata, sopra un piano, dello spazio da quattro dimensioni.* (Catania, Tip. Sicula, 1904.)

— — *La trasformazione quadratica* (2, 2) *fra piani.* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1903.)

— — *Le trasformazioni cubiche* (2, 2) *fra piani.* Id. 1903.

— — *Sulle curve razionali del quinto ordine.* Id. 1904.

— — *Distanza ed angolo di enti complessi.* Id. 1904.

— — *Il secondo teorema della media per gl'integrali multipli.* (Atti dell'Accad. Gioenia di Scienze Mat. in Catania, 1902.)

— — *Sulle varietà del quarto ordine con piano doppio dello spazio a quattro dimensioni.* (Giornale di Mat. di Battaglini, 1903).

PASCAL. — *Ricerche sulla sestica binaria.* (Memorie della R. Acc. dei Lincei, 1905).

— — *La classificazione delle superficie del* 5° *ordine con quintica doppia.* (Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, 1905.)

SIBIRANI. — *Insiemi innumerabili di punti uniformemente densi sopra linee od aree assegnate.* (Giornale di Mat. di Battaglini, 1905.)

Annals of Math.

SULLA DEFINIZIONE STAUDTIANA DELL'OMOGRAFIA

tra forme semplici reali

§ I. Una famosa definizione di G. C. VON STAUDT (1) — più tardi accolta da varî autori, e ormai riprodotta in ogni corso di Geometria Proiettiva — stabilisce che i termini "projettività", "omografia", o (come anche si disse) "corrispondenza armonica" tra due forme fondamentali di 1ª specie r ed r' siano sinonimi di "trasformazione univoca e reciproca di r in r', che a ciascun gruppo armonico (dell'una o dell'altra forma) coordina un gruppo armonico". Ebbi altra volta occasione di segnalare (2) che c'è del superfluo e del sovrabbondante in ciascuna delle assunzioni, che la corrispondenza debba essere univoca *in ambo i sensi*, e convertire *qualunque* gruppo armonico in un gruppo armonico: cioè qualche cosa che, date le ordinarie premesse della Geometria projettiva, è conseguenza del resto. Qui mi propongo di giustificare codesta asserzione, dimostrando che, una volta concessi i postulati I-XVII della memoria testè citata e un certo principio XVIII' (vedi il seg. § 3) che in ordine ai fini della Geometria Projettiva di 1° e 2° grado può far le veci del postulato di R. DEDEKIND, la *reciprocità* o *invertibilità* della supposta trasformazione di r in r', e la sua *costanza nel riprodurre i gruppi armonici*, son conseguenze di altre condizioni un po' più generali e men restrittive. Queste sono:

I Che la rappresentazione onde si parla *subordini a ciascun elemento di* r *un solo elemento di* r' (sia dunque una r'fr nell'accezion più generica),

II e a qualsivoglia coppia di elementi *distinti l'uno dall'altro* in r una coppia di elementi eziandio *non coincidenti fra loro* in r'.

III Che esistano in r' due elementi diversi fra loro e tali, che *ciascun gruppo armonico, il quale contenga l'uno o l'altro di quelli, si rappresenti per un gruppo armonico.*

---

(1) *Die Geometrie der Lage.* Nürnberg, Fr. Korn, 1847, n. 103.

(2) *I principî della Geometria di Posizione composti in sistema logico deduttivo.* Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino, v. XLVIII₂ (1898), § 10, in nota.

Che ogni trasformazione isomorfa di r in r' (vale a dire soggetta alle condizioni I e II) la quale non abbia virtù di alterare le relazioni armoniche, debba esser necessariamente conversiva o reciproca, si può anche desumere dall'argomentazione algebrica di G. DARBOUX (1) per cui si conferma il teorema fondamentale di Staudt, premessa la continuità della retta, che qui non occorre. Anzi (corollario non segnalato dall'illustre A.) codesto ragionamento prova senz'altro la verità delle nostre asserzioni; perchè se ne deduce eziandio, che le proprietà significate in I, II e III sono per sè sufficienti a definire l'omografia tra forme semplici reali. E invero la dimostrazione di G. DARBOUX riposa sostanzialmente nel fatto che i gruppi armonici:

$$(x_1,\ x_3,\ x_2,\ \infty) \quad \text{con} \quad x_1 + x_3 = 2x_2$$

ed

$$(x_1,\ 1,\ x_3,\ -x_3) \quad \text{con} \quad x_1 = x_3^2$$

i quali tutti contengono l'uno o l'altro dei punti ∞ e 1, debbono rappresentarsi per gruppi armonici. Ma nondimeno riuscirà forse gradito ai cultori della pura geometria di Posizione il veder confermata la cosa per tutt'altra via, coi più semplici mezzi di cui si fa bello il metodo Staudtiano, e senza mai richiamarsi alla continuità della retta nel senso di R. DEDEKIND e G. CANTOR.

Osservate, che le condizioni I e III involgerebber senz'altro la II, quando per " gruppo armonico di punti " s'intendesse soltanto la figura costituita in due punti diagonali d'un quadrangolo, e nelle tracce della lor congiungente sui lati che passano dal terzo punto diagonale. (2) Ma qui si preferisce allargare il significato di gruppo armonico, sì da comprendervi ancora ogni quaterna di punti, dove i primi tre punti, o gli ultimi tre, coincidano. Sotto il regime di codesta definizione si potrebbe non di meno sostituire alla condizione II quest'altra: che " nessun punto di r' rappresenti infiniti punti di r (diversi fra loro) "; giusta il teorema seguente, che non dimostriamo:

" Se una retta r si trasforma univocamente in un'altra r' per modo, che tutti i gruppi armonici, i quali contengono un certo punto di r si rappresentino in gruppi armonici, e che nessun punto di r' rispecchi infiniti punti di r (tutti diversi fra loro), la trasformazione è necessariamente isomorfa ".

In tutto ciò che segue poniamo che φ sia rappresentazione d'una retta r sopra un'altra r', soddisfacente alle condizioni I, II, III; e con x' indichiamo l'immagine del punto x, qual ch'esso sia ($x' \equiv \varphi x$). L'ipotesi è dunque che φ sia trasformazione isomorfa di r in r' (condizioni I e II), e che sulla retta r esistan due punti non coincidenti, sian per es. a e c, tali che ciascun gruppo armonico in r, il

(1) *Sur le théorème fondamentale de la Géométrie Projective.* Mathem. Annal., XVII, pag. 55.
(2) STAUDT, loc. cit, n. 93.

quale contenga *a* o *c*, sia trasformato da φ in un gruppo armonico. Essendo inoltre *e*, *f*, *g* punti allineati e distinti, il simbolo "(*efg*)" starà per "segmento projettivo terminato in *e* e *g*, e contenente *f*".

Per legittimare in ogni parte le poche illazioni che seguono, giusta le norme deduttive più rigorose, converrà ch'io mi appelli alla memoria su "*I principî della Geometria di Posizione* etc." dianzi citata: mi sia concesso di richiamarla col segno θ.

§ 2. Teorema I. — *Dati* r, r′, φ *come sopra* (§ 1), *se* b *e* d *siano punti di* r *i quali separino l'uno dall'altro i punti* a *e* c *implicati dalla condizione* **III**, *le loro immagini* b′≡φb *e* d′≡φd *saranno alla lor volta separate per mezzo dei punti* a′≡φa *e* c′≡φc.

L'ipotesi involge (θ, P. 20 § 5) che i punti *a* e *b* non siano separati l'un l'altro per mezzo dei punti *c* e *d*, nè i punti *a* e *d* per mezzo dei punti *b* e *c*: onde esiston per certo (θ, P. 1 § 5) due punti *x* ed *y* coniugati armonicamente fra loro tanto rispetto ad *a* e *b*, quanto rispetto a *c* e *d*; e due punti *u* e *v* separati armonicamente fra loro così dai punti *a* e *d*, come dai punti *c* e *b*. Dunque esiston due punti *x′* ed *y′* armonici ad ambo le coppie (*a′*, *b′*) e (*c′*, *d′*); però che, in grazia della condizione **III**, dovranno essere armoniche le due quaterne di punti φ(*a*, *b*, *x*, *y*) e φ(*c*, *d*, *x*, *y*); come esistono ancora, e per lo stesso motivo, due punti *u′* e *v′* armonici ad ambo le coppie (*a′*, *d′*) e (*c′*, *b′*). Dunque, ciascuno degli *a′*, *b′*, *c′*, *d′* essendo diverso dagli altri, grazie alla condizione **II**, bisognerà che i punti *a′* e *c′* separino i punti *b′* e *d′* (θ, P. 21 § 5).

Teorema II. — *Sotto le stesse ipotesi intorno ad* r, r′, φ, a *e* c, *se* b *e* d *siano punti di* r *non separati l'un l'altro per mezzo dei punti* a *e* c, *nemmeno potranno separarsi a vicenda le coppie* (b′, e′) *ed* (a′, c′).

Insomma dall'esser *b* un punto diverso da ognuno degli *a* e *c*, ma come questi giacente sopra la retta *r*, si deduce che il segmento proiettivo (*abc*) deve aver per immagine sull'altra retta una classe di punti tutta contenuta dal segmento proiettivo (*a′b′c′*).

Si può conceder che i punti *b* ed *e* sian diversi fra loro e dai punti *a* e *c*. Tolgasi in *r* un punto *d*, separato dal punto *b* per mezzo di *a* e *c*; tale ad es. l'armonico di *b* rispetto ad *a* e *c* (θ, P. 23 § 5). Allora i punti *c* e *d* non potranno separare i punti *a* ed *e* (θ, P. 13 § 5); nè i punti *a* e *d* separare i punti *c* ed *e*. Esisterà dunque (condizione **III** ecc.) una coppia armonica ad ambo le coppie (*c′*, *d′*) e (*a′*, *e′*), come pure una coppia armonica ad ambo le coppie (*a′*, *d′*) e (*c′*, *e′*); ond'è forza che si separino fra loro le coppie (*a′*, *c′*) e (*d′*, *e′*) (θ, P. 21 § 5) i quattro punti essendo al tutto distinti (condizione **II**). Dunque *e′* non appartiene al segmento (*a′d′c′*), e per conseguenza *e′* appartiene al segmento (*a′b′c′*) (θ, P. 13 § 6) c. v. d.

Teorema III. — *Preso a piacere in* r *un punto* b *diverso da* a *e da* c, *la figura* φ(acb), *cioè l'immagine del segmento proiettivo* (acb), *sarà contenuta per intero dal segmento proiettivo* (a′c′b′).

Invero, se il punto x appartenga al segmento (acb), vi saranno due punti distinti ed armonici ad ambo le coppie (a, b) e (c, x) (θ, P. 1 § 5); dunque (**III**) il simile accade circa le coppie (a', b') e (c', x'): dunque x' appartiene al segmento $(a'c'b')$.

Teorema IV. — *Premessa ancora l'ipotesi del teor. III, se la trasformazione* φ (§ 1) *rappresenta in sè stesso ognuno dei punti* a, c *e* b, (*onde* r' = r), *dovrà eziandio convertire in sè stesso ciascuno dei punti:*

$$\beta_1 \equiv \mathbf{Arm}\,(a, b, c),\ \beta_2 \equiv \mathbf{Arm}\,(a, \beta_1, c), \ldots, \beta_i \equiv \mathbf{Arm}\,(a, \beta_{i-1}, c);$$
$$\beta_{i,2} \equiv \mathbf{Arm}\,(c, \beta_i, a),\quad \beta_{i,3} \equiv \mathbf{Arm}\,(c, \beta_{i,2}, \beta_i),$$
$$\beta_{i,4} \equiv \mathbf{Arm}\,(c, \beta_{i,3}, \beta_{i,2}), \ldots, \beta_{i,l} \equiv (c, \beta_{i,l-1}, \beta_{i,l-2});$$

quali che siano i numeri interi positivi i *ed* l (*sempre che* i>l *ed* l>3).

Grazie alla condizione **III** ed al fatto, che il quarto armonico dopo tre punti collineari e non coincidenti fra loro è un punto determinato univocamente da quelli (θ, P. 12, 13, 16 § 4) sarà senza fallo tautologo il punto β_1, diverso da a e da c (θ, P. 7 § 4); quindi tautologo il punto β_2; anzi tautologo il punto β_i, purchè sia tale il punto β_{i-1}. Dunque tautologo il punto β_i qualunque sia l'indice i. Per egual modo la trasformazione φ dovrà tener fermo ogni punto $\beta_{i,2}$, $\beta_{i,3}$, $\beta_{i,4}$ (tutti e tre diversi da c); ed anche il punto $\beta_{i,l}$ — dato che φ rappresenti in sè stesso ciascuno dei punti $\beta_{i,l-1}$, $\beta_{i,l-2}$, e che questi non si confondano in c — però che il punto $\beta_{i,l}$ comparisce in un gruppo armonico dopo i tre punti tautologhi c, $\beta_{i,l-1}$, $\beta_{i,l-2}$: ecc.

§ **3.** Teorema V. — *Qualsivoglia trasformazione* φ *soggetta alle condizioni* **I, II** e **III** (§ 1) *purchè non alteri i punti* a *e* c *contemplati dalla* **III** (*onde* r' = r), *e che lasci fermo anche un punto* b *della retta diverso da* a *e da* c, *dovrà convertire qualunque punto di* r *in sè stesso.*

Regge in ogni parte anche qui la dimostrazione recata nel Saggio " *Circa il teorema fondamentale di Staudt e i principî della Geometria Proiettiva* ". (Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, v. XXXIX, 1904, § 2) la quale riposa sul seguente principio (che non involge continuità nel senso di R. Dedekind e G. Cantor):

" Essendo a, b, c punti collineari e distinti fra loro; p e p' due punti a piacere nel segmento proiettivo (abc), purchè non coincidenti; se si costruiscon gli armonici:

$$\beta_1 \equiv \mathbf{Arm}\,(a, b, c),\ \beta_2 \equiv \mathbf{Arm}\,(a, \beta_1, c), \ldots, \beta_i \equiv \mathbf{Arm}\,(a, \beta_{i-1}, c),$$

si deve giungere a un punto, sia p. es. β_i, tale che nella serie armonica:

$$\beta_{i,1} \equiv \beta_i,\ \beta_{i,2} \equiv \mathbf{Arm}\,(c, \beta_i, a),\ \beta_{i,3} \equiv \mathbf{Arm}\,(c, \beta_{i,2}, \beta_i),\ \beta_{i,4} \equiv \mathbf{Arm}\,(c, \beta_{i,3}, \beta_{i,2}), \ldots$$

vi sia qualche punto $\beta_{i,l} \equiv \mathbf{Arm}\,(c, \beta_{i,l-1}, \beta_{i,l-2})$ esterno al segmento proiettivo (pap') ".

Basterà dimostrare (θ, P. 23 § 5, P. 13 § 6, ecc.) che ciascun punto del segmento (abc) corrisponde a sè stesso. Poniamo che esista un punto p di (abc), diverso dal corrispondente p'. Grazie al teor. II, il punto p' dovrà giacer similmente in (abc); dunque o p' appartiene al segmento (acp), o p al segmento (acp') (θ, P. 5 § 6). In ambo i casi fra p e p', cioè fuor del segmento (pap') e dei punti p e p', dovrà cader senza fallo un punto tautologo β, grazie al principio suddetto e al teor. IV (viste anche le θ, P. 1, 11, 5, § 6). Ora, dato che il punto p' stia nel segmento (acp), ne viene (θ, P. 11, 2, § 6) che β appartiene al segmento (acp) senza appartenere al segmento (acp') contro il teor. III (dove si legga p e p' invece di b e b'). Nel medesimo assurdo si cade, ove p stia nel segmento (acp'); però che allora il punto tautologo β giacerà nel segmento (cap) senza giacere in (cap'), contro $\begin{pmatrix} c, a \\ a, c \end{pmatrix}$ teor. III: ved. θ, P. 7, 31, 28 § 5, e P. 11, 2 § 6.

Teorema VI. — *Qualsivoglia rappresentazione* φ *soddisfacente alle condizioni* I, II e III *è una corrispondenza invertibile tra le due rette* r *ed* r'; *e a ciascun gruppo armonico dell'una o dell'altra retta coordina un gruppo armonico.*

Tolgasi in r un punto b a piacere, purchè diverso da a e c: e sia poscia ψ una proiezione univoca di r in r', che trasferisca ordinatamente i punti a, b, c nei punti φa, φb, φc (θ, § 4). Questa sarà, com'è noto, trasformazione armonica e conversiva o reciproca d'r in r'; e la sua inversa ψ^{-1} eziandio conversiva ed armonica. Ora il prodotto di φ per l'inversa di ψ ne porge una rappresentazione (di r sopra sè stessa), la quale possiede i caratteri I, II e III, e tien fermo individualmente ciascuno dei punti a, b, c. Dunque, teor. V) $\psi^{-1}\varphi = 1$, e per conseguenza $\varphi = \psi$: cioè le trasformazioni φ e ψ non si distinguon fra loro, c. v. d. [1]

Mario Pieri
(*Catania*).

[1] La dimostrazione del teor. V si regge tutta sul teor. IV e sul fatto (significato dai teor. II e III) che i punti del segmento proiettivo (abc) terminato in c, o del segmento proiettivo (acb) contenente c, si trasformano in punti di un certo segmento $(a'b'c')$ o $(a'c'b')$. Ora il teor. IV sussisterebbe quand'anche invece della condizione III si avesse quest'altra più generale:

III' " Ch'esista in r un punto c tale, che ciascun gruppo armonico il quale contenga c si rappresenti per un gruppo armonico ".

Sarà dunque vero altresì che: " Qualsivoglia rappresentazione di r in r', pur che soddisfi alle condizioni I, II e III' e che ad ogni segmento, il quale contenga c o sia terminato in c, subordini punti di un'altro segmento, è una corrispondenza omografica ". E di qui per es. ne viene che: " Ogni trasformazione continua di r in r' soddisfacente alle condizioni I, II e III' è sempre un'omografia "; la qual cosa potrebbe eziandio confermarsi seguendo il Darboux, nella mem. cit.

SULLA DETERMINAZIONE DEGLI ASSINTOTI DELLE CURVE ALGEBRICHE

Nella maggior parte dei trattati di calcolo si trovano esposte le regole generali per trovare gli assintoti, delle curve, ma sono appena accennate le regole particolari per trovare gli assintoti delle curve algebriche.

Per lo più si osserva semplicemente che, data l'equazione in coordinate cartesiane di una curva algebrica di ordine n l'equazione che si ottiene eguagliando a zero la somma dei termini di grado n rappresenta n rette parallele agli assintoti. Qualcuno, come per es. il Vivanti nel suo ottimo trattato, aggiunge che essendo

$$f(x, y) = \sum_0^n u_i(x, y) = 0$$

l'equazione della curva, ove $u_i(x, y)$ rappresenta una funzione omogenea di x, y di grado i, l'equazione

$$X \frac{\partial u_n}{\partial x} + Y \frac{\partial u_n}{\partial y} + u_{n-1} = 0,$$

nella quale ad $\frac{y}{x}$ si sostituisca una radice della $u_n = 0$, rappresenta un assintoto.

Ma questa equazione diventa indeterminata, se $\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial u_n}{\partial y} = u_{n-1} = 0$; e, per quanto so, non è stata mai fatta una discussione compiuta della importante questione. Tale discussione, assai semplice e naturale, mi propongo di esporre nella presente nota per uso degli studenti.

I. Consideriamo una curva algebrica di ordine n rappresentata in coordinate omogenee dall'equazione

$$f(x_1 x_2 x_3) = u_n(x_1 x_2) + x_3 u_{n-1}(x_1 x_2) + x_3^2 u_{n-2}(x_1 x_2) + \dots$$
$$\dots + x_3^s u_{n-s}(x_1 x_2) + \dots + x_3^n = 0, \qquad (1)$$

dove $u_i(x_1 x_2)$ è funzione omogenea di grado i delle x_1, x_2, e proponiamoci la ricerca dei punti d'incontro di essa dalla retta $x_3 = 0$ e delle tangenti alla curva in questi punti.

I punti d'incontro della curva colla retta $x_3 = 0$ sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1 x_2 x_3) = 0 \\ x_3 = 0 \end{array}\right\},$$

che per la (1) equivale all'altro

$$\left.\begin{aligned} u_n(x_1\, x_2) = 0 \\ x_3 = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

La prima di queste equazioni ha n radici rispetto al rapporto $\frac{x_2}{x_1}$, e quindi si hanno n punti d'incontro reali o complessi, distinti o coincidenti.

Esaminiamo i vari casi che possono presentarsi:

1°. *Sia* $\alpha = \frac{x_2}{x_1}$ *una radice semplice dell'equazione* $u_n(x_1, x_2) = 0$.

Si ha allora un punto d'incontro ordinario di $x_3 = 0$ colla curva, ed è noto che la tangente in esso è rappresentata dall'equazione

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0.$$

Siccome

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{\partial u_n}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} + x_3^2 \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x_1} + \ldots + x_3^{n-1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{\partial u_n}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2} + x_3^2 \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x_2} + \ldots + x_3^{n-1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} &= u_{n-1} + 2x_3\, u_{n-2} + 3x_3^2\, u_{n-3} + \ldots + nx^{n-1} u_0 \end{aligned}\right\}, \qquad (3)$$

e per il punto considerato, essendo $x_3 = 0$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial u_n}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial u_n}{\partial x_2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3} = u_{n-1}(x_1\, x_2),$$

l'equazione precedente diviene

$$X_1 \frac{\partial u_n}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u_n}{\partial x_2} + X_3 u_{n-1} = 0. \qquad (4)$$

2°. *Sia* $\alpha = \frac{x_2}{x_1}$ *una radice doppia dell'equazione* $u_n(x_1\, x_2) = 0$.

Dovrà essere

$$u_n(x_1\, x_2) = 0, \qquad \frac{\partial u_n}{\partial x_2} = 0,$$

e quindi anche per la relazione

$$x_1 \frac{\partial u_n}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u_n}{\partial x_2} = n u_n$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial u_n}{\partial x_2} = 0.$$

Possono allora presentarsi due casi:

a) Se $u_{n-1} \neq 0$, essendo anche $\frac{\partial f}{\partial x_3} \neq 0$, il punto non è multiplo per la curva, l'equazione (4) si riduce a

$$X_3 = 0,$$

cioè la x_3 è tangente in quel punto alla curva.

b) Se anche $u_{n-1}=0$, allora la (4) è indeterminata, cioè ogni retta taglia la curva due volte in quel punto che è doppio, come risulta dal fatto che in questo punto si ha per le (3)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_2}=\frac{\partial f}{\partial x_3}=0.$$

L'equazione complessiva delle tangenti in un punto doppio è simbolicamente

$$\left(X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+X_3\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2=0.$$

Dalle (3) si ricava

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1^2}+x_3\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x_1^2}+\dots$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_2^2}+x_3\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x_2^2}+\dots$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1\partial x_2}+x_3\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x_1\partial x_2}+\dots$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}=2u_{n-2}+3\,.\,2x_3u_{n-3}+\dots$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3}=\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1}+2\,x_3\frac{\partial u_{n-2}}{\partial x_1}+\dots$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3}=\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2}+2\,x_3\frac{\partial u_{n-2}}{\partial x_2}+\dots,$$

ed a causa delle ipotesi fatte si ha per il punto considerato

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1}=\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1^2},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_2^2},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}=2\,u_{n-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1\partial x_2},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3}=\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3}=\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2}.$$

Perciò l'equazione complessiva delle tangenti è

$$X_1^2\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1^2}+2X_1X_2\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1\partial x_2}+X_2^2\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_2^2}+2X_1X_3\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1}+$$
$$+\,2X_2X_3\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2}+2\,u_{n-2}\,X_3^2=0. \qquad (5)$$

Se

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_2^2}=0,$$

la (5) diviene

$$2X_3\left\{X_1\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2}+u_{n-2}\right\}=0,$$

cioè una delle tangenti è $x_3=0$ l'altra è la retta

$$X_1\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2}+X_2\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2}+X_3u_{n-2}=0\,;$$

e se anche

$$\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1}=\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2}=0,$$

questa seconda retta coincide pure con la $x_3=0$, cioè il punto considerato è di regresso e la x_3 è la tangente di esso.

Se infine anche $u_{n-2}=0$, la (5) diviene indeterminata; e ciò è naturale, perchè allora le sei derivate di 2° ordine di f sono tutte nulle e il punto considerato è per lo meno triplo.

2. *Più generalmente sia* $\alpha=\dfrac{x_2}{x_1}$ *una radice multipla di ordine* $p>2$ *della equazione* $u_n(x_1\,x_2)$. Si trova come nel 2° caso che devono essere nulle tutte le derivate di u_n di ordine inferiore a p, ma non tutte quelle di ordine p devono essere nulle.

Possono allora presentarsi diversi casi.

a) Nel punto P sia $u_{n-1}\neq 0$. Poichè $\dfrac{\partial f}{\partial x_3}=u_{n-1}$ è diversa da zero, risulta che P è un punto semplice della curva

In tal caso la retta $x_3=0$ ha un contatto di ordine $p-1$ colla curva in P e non esistono altre tangenti distinte da x_3.

b) Supponiamo che (essendo $q\leqslant p$)

u_n sia nullo con tutte le sue derivate di ordine inferiore a q
u_{n-1} » » » » » $q-1$
u_{n-2} » » » » » $q-2$
. . . .
u_{n-q-2} » » » » » 2
u_{n-q-1} sia nullo

ma fra le derivate di u_n di ordine q
» u_{n-1} » $q-1$
» u_{n-2} » $q-2$
. . . .
» u_{n-q-1} » 1
e la funzione u_{n-q}
qualcuna non sia nulla.

Si noti che si ha

$$\frac{\partial^{h+k}f}{\partial^h x_1\partial^k x_2}=\frac{\partial^{h+k}u_n}{\partial^h x_1\partial^k x_2}+x_3\frac{\partial^{h+k}u_{n-1}}{\partial^h x_1\partial^k x_2}+\dots$$
$$\dots+x_3^s\frac{\partial^{h+k}u_{n-s}}{\partial^h x_1\,\partial^k x_2}+x_3^{s+1}\frac{\partial^{h+k}u_{n-s-1}}{\partial^h x_1\partial^k x_2}+\dots,$$

e quindi

$$\frac{\partial^{h+k+s}f}{\partial^h x_1\partial^k x_2\partial^s x_3}=\underline{|s}\,\frac{\partial^{h+k}u_{n-s}}{\partial^h x_1\,\partial^k x_2}+\frac{\underline{|s+1}}{\underline{|1}}\,x_3\,\frac{\partial^{h+k}u_{n-s-1}}{\partial^h x_1\partial^k x_2},$$

e per $x_3=0$

$$\frac{\partial^{h+k}f}{\partial^h x_1\,\partial^k x_2}=\frac{\partial^{h+k}u_n}{\partial x_1^h\,\partial x_2^k},\qquad \frac{\partial^{h+k+s}f}{\partial x_1^h\partial x_2^k\partial x_3^s}=\underline{|s}\,\frac{\partial^{h+k}u_{n-s}}{\partial x_1^h\,\partial x_2^k}.$$

Dalle ipotesi fatte risulta che sono nulle nel punto considerato tutte le derivate di f di ordine $<q$ ma non tutte quelle di ordine q, cioè il punto è multiplo di ordine q.

L'equazione complessiva delle tangenti in quel punto è, come è noto, simbolicamente

$$\left(X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^q = 0,$$

ossia, sempre simbolicamente

$$\left(X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^q + \binom{q}{1}\left(X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^{q-1} \frac{\partial f}{\partial x_3} X_3 +$$
$$+ \binom{q}{2}\left(X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^{q-2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} X_3^2 + \ldots = 0,$$

ossia per le eguaglianze precedenti

$$\left(X_1 \frac{\partial u_n}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u_n}{\partial x_2}\right)^q + \underline{|1}\binom{q}{1}\left(X_1 \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2}\right)^{q-1} X_3 +$$
$$+ \underline{|2}\binom{q}{2}\left(X_1 \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x_2}\right)^{q-2} X_3^2 +$$
$$+ \underline{|s}\binom{q}{s}\left(X_1 \frac{\partial u_{n-s}}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u_{n-s}}{\partial x_2}\right)^{q-s} X_3^s \ldots = 0,$$

ossia

$$\left(X_1 \frac{\partial u_n}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u_n}{\partial x_2}\right)^q + q\left(X_1 \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2}\right)^{q-1} X_3 +$$
$$+ q(q-1)\left(X_1 \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x_2}\right)^{q-2} X_3^2 + \ldots$$
$$\ldots + q(q-1)\ldots(q-s+1)\left(X_1 \frac{\partial u_{n-s}}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u_{n-s}}{\partial x_2}\right)^{q-s} X_3^s + \ldots$$
$$\ldots + \underline{|q} u_{n-q} x_3^q = 0. \qquad (6)$$

Se $q = p$ il primo termine della (6) per ipotesi non è identicamente nullo e la (6) rappresenta p rette, nessuna delle quali coincide con x_3.

Se $q < p$, il primo termine si annulla, perchè per ipotesi P corrisponde ad una radice multipla di indice p della $u_n(x_1\ x_2) = 0$. Supponendo per generalità che il primo termine della sviluppata che non si annulla sia l'$(s+1)^{esima}$, delle q rette rappresentate dalla (6), s coincidono con la x_3 e le altre sono rappresentate dall'equazione

$$q(q-1)\ldots(q-s+1)\left(X_1 \frac{\partial u_{n-s}}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u_{n-s}}{\partial x_2}\right)^{q-s} +$$
$$q(q-1)\ldots(q-s)\left(X_1 \frac{\partial u_{n-s-1}}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u_{n-s-1}}{\partial x_2}\right)^{q-s-1} X_3 + \ldots \underline{|q}.u_{n-q} X_3^{q-s} = 0. \qquad (7)$$

***

Si supponga ora che la retta $x_3 = 0$ del triangolo fondamentale sia la retta all'infinito, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ sieno gli assi delle x e delle y di un sistema cartesiano ed il punto unità sia quello che ha le coordinate 1, 1 rispetto a questi assi. Allora è noto che le coordinate

cartesiane x, y sono legate alle coordinate omogenee dalle relazioni $\frac{x_2}{x_1}=x$, $\frac{x_3}{x_1}=y$. Il sistema $u_n(x_1 x_2)=0$, $x_3=0$ dà i punti all'infinito della curva, e le equazioni o (4) o (6) o (7) rappresentano gli assintoti nei vari casi.

Infine se dividiamo l'equazione $f(x_1 x_2 x_3)=0$ della curva per $x_3{}^n$, essa diventa dalla forma

$$F(x y) = V_n(x y) + V_{n-1}(x y) + V_{n-2}(x y) + \ldots + V_0$$

dove $V_s(x\ y) = u_s(x_1\ x_2)\frac{1}{x_3{}^s}$ è una funzione omogenea di x, y.

Possiamo allora enunciare le seguenti regole che sono conseguenze immediate delle considerazioni precedenti.

1ª. Ogni assintoto deve essere parallelo ad una delle n rette rappresentate dalla equazione

$$V_n(x,\ y) = 0,$$

ossia ha per coefficiente angolare una delle radici dell'equazione

$$W_n(\alpha) = 0, \tag{8}$$

avendo posto

$$W_s(\alpha) = \frac{1}{x_3{}^s} V_s(x y) = V_s(1, \alpha) = u_s(1, \alpha) = 0.$$

2ª. Per ogni radice semplice α_i dell'equazione (8) esiste un solo assintoto rappresentato dall'equazione

$$X\frac{\partial u_n}{\partial x} + Y\frac{\partial u_n}{\partial y} + u_{n-1} = 0,$$

nella quale ad $\frac{y}{x}$ si sostituisca α_i.

3ª. Se α_i è una radice multipla di ordine p della (8), cioè annulla anche le sue prime $p-1$ derivate rispetto ad α, ma non la p-esima, occorre esaminare i valori di

$$W_{n-1}(\alpha_i) \ldots W_0(\alpha_i)$$

e delle loro derivate.

Se

$$\left.\begin{array}{c} W_n(\alpha_i) = W'_n(\alpha_i) \ldots = W_n^{(p-1)}(\alpha_i) = 0 \\ W_{n-1}(\alpha_i) = W'_{n-1}(\alpha_i) \ldots = W^{(p-2)}(\alpha_i) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ W_{n-p\cdot 1} = 0 \end{array}\right\}, \tag{9}$$

esistono p assintoti di cofficiente angolare α_1, e la loro equazione complessiva è

$$\left(X\frac{\partial u_n}{\partial x} + Y\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)^p + p\left(X\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + Y\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right)^{p-1} + \ldots + \underline{|p}\, u_{n-p} = 0 \tag{10}$$

ove al posto di $\frac{y}{x}$ si ponga α_i.

Se non tutte l'equazioni suddette (9) sono verificate e $n-q$ $(q<p)$ è il grado massimo di quelle fra le funzioni $W_s^{(r)}$ che non si annullano per α_1, ed inoltre fra le funzioni

$$W_{n-1}^{(q-1)}(\alpha_1) \quad W_{n-2}^{(q-2)}(\alpha_1)\ldots W_{n-s}^{(q-s)}(\alpha_1)\ldots W_{n-q}(\alpha),$$

tutte di ordine q, la prima che non si annulla per il valore α_1 è $W_{n-s}^{(q-s)}(\alpha)$, esistono $q-s$ assintoti di cofficiente angolare α_1 rappresentati dalla equazione

$$q(q-1)\ldots(q-s+1)\left(x\frac{\partial u_{n-s}}{\partial x}+y\frac{\partial u_{n-s}}{\partial y}\right)^{q-s}+$$

$$+q(q-1)\ldots(q-s)\left(x\frac{\partial u_{n-s-1}}{\partial x}+y\frac{\partial u_{n-s-1}}{\partial y}\right)^{q-s-1}+\ldots+\underline{|q}\, u_{n-q}=0. \quad (11)$$

***

Esempio I. — Cerchiamo gli assintoti della *kreuzcurva* rappresentata dall'equazione.

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1$$

ossia

$$f(x\,y)=x^2y^2-(b^2x^2+a^2y^2)=0.$$

In questo caso si ha

$$V_4=x^2y^2 \qquad V_3=0$$
$$V_2=-(b^2x^2+a^2y^2) \qquad V_1=V_0=0.$$

L'equazione $V_4=0$ ha per soluzioni $x=0$ e $y=0$, ambedue radici doppie. Si ha poi

$$\frac{\partial V_4}{\partial x}=2xy^2 \qquad \frac{\partial V_4}{\partial y}=2x^2y$$
$$\frac{\partial^2 V_4}{\partial x^2}=2y^2 \qquad \frac{\partial^2 V_4}{\partial x\partial y}=4xy \qquad \frac{\partial^2 V_4}{\partial y^2}=2x^2.$$

Per $\frac{y}{x}=0$, V_4 si annulla con le sue derivate prime e seconde eccetto

$$\frac{\partial^2 V_4}{\partial y^2}=2x^2, \qquad \text{e} \qquad V_2=-b^2x^2.$$

Dunque $n=4$, $p=2$, $q=p=2$, ed occorre applicare la (10) che dà come equazione degli assintoti corrispondenti

$$2\,Y^2x^2-2\,b^2x^2=0$$
$$Y^2=b^2$$
$$Y=\pm\, b.$$

Analogamente per la radice $\frac{x}{y}=0$ si trovano gli assintoti

$$x=\pm\, a.$$

I punti all'∞ di questi assintoti sono due punti doppi.

ESEMPIO II. — Cerchiamo gli assintoti della curva rappresentata dall'equazione

$$\frac{a^3}{x^3} + \frac{b^3}{y^3} = 1.$$

Si ha, riducendo a forma intera,

$$f(x\,y) = x^3y^3 - (a^3y^3 + b^3x^3) = 0,$$

e quindi

$$V_6 = x^3y^3, \qquad V_5 = V_4 = 0$$

$$V_3 = -(a^3y^3 + b^3x^3), \qquad V_2 = V_1 = V_0 = 0.$$

Radici di $V_6 = 0$ sono $x = 0$, $y = 0$, ambedue triple. Si ha poi

$$\frac{\partial V_6}{\partial x} = 3x^2y^3 \qquad \frac{\partial V_6}{\partial y} = 3x^3y^2$$

$$\frac{\partial^2 V_6}{\partial x^2} = 6xy^3 \qquad \frac{\partial^2 V_6}{\partial x.\partial y} = 9x^2y^2 \qquad \frac{\partial^2 V_6}{\partial y^2} = 6x^3y$$

$$\frac{\partial^3 V_6}{\partial x^3} = 6y^3 \qquad \frac{\partial^3 V_6}{\partial x^2 \partial y} = 18xy^2 \qquad \frac{\partial^3 V_6}{\partial x \partial y^2} = 18x^2y \qquad \frac{\partial^3 V_6}{\partial y^3} = 6x^3.$$

Per $\frac{y}{x} = 0$ si annullano tutte le espressioni precedenti, eccettuate

$$\frac{\partial^3 V_6}{\partial y^3} = 6x^3, \qquad V_3 = -b^3x^3,$$

e l'equazione (10) diventa

$$6Y^3x^3 - \underline{|3}\, b^3x^3 = 0,$$

ossia

$$Y^3 - b^3 = 0$$

cioè esistono due assintoti immaginari, rappresentati dall'equazione

$$Y^2 + bY + b^2 = 0$$

ed uno reale $Y = b$.

Analogamente si trovano due assintoti imaginari $X^2 + aX + a^2$ ed uno reale $X = a$.

G. LAZZERI.

INTORNO ALLE DIFFERENZE DI 0^q E ALLE IDENTITÀ ARITMETICHE

1. Noi vogliamo qui applicare allo studio delle funzioni numeriche alcune proprietà delle differenze di 0^q.

È noto che, se q è un numero intero positivo, la successione

$$0^q, \ 1^q, \ 2^q, \ 3^q, \ldots, n^q, \ldots$$

costituisce una progressione aritmetica d'ordine q; indicandone pertanto, e com'è solito, con $\Delta^r 0^q$ la differenza r^{ima}, si ha [1]

$$\Delta^r 0^q = r^q - \binom{q}{1}(r-1)^{q-1} + \binom{q}{2}(r-2)^{q-2} - \ldots + (-1)^q. \qquad (1)$$

---

[1] Si vegga per es. CESÀRO, *Analisi algebrica*, p. 461.

Per $r=q$ è

$$\Delta^q 0^q = q!, \tag{2}$$

e per $r>q$ è

$$\Delta^r 0^q = 0. \tag{3}$$

Fra le proprietà delle differenze di 0^q noi dobbiamo per il nostro scopo segnalare la seguente. Se con $[1, q]^r$ si indica la somma dei prodotti ad r ad r dei numeri $1, 2, \ldots q$ si ha, per $r<q$,

$$[1, q]^{q-r}\Delta^r 0^r - [1, q]^{q-r-1}\Delta^r 0^{q+1} + \ldots + (-1)^{q-r}\Delta^r 0^q = 0. \tag{4}$$

Per dimostrare questa proprietà osserviamo che se nell'identità

$$(x-1)(x-2)\ldots(x-q) = x^q - [1, q]^1 x^{q-1} + [1, q]^2 x^{q-2} - \ldots + (-1)^q$$

si pone r al posto di x, si trae, per $r \leqq q$,

$$r^q - [1, q]^1 r^{q-1} + [1, q]^2 r^{q-2} - \ldots + (-1)^q = 0, \tag{5}$$

e per $r>q$

$$r^q - [1, q]^1 r^{q-1} + [1, q]^2 r^{q-2} - \ldots + (-1)^q = (r-1)(r-2)\ldots(r-q). \tag{6}$$

Ora se moltiplichiamo ambo i membri di

$$\Delta^r 0^{q-s} = r^{q-s} - \binom{q-s}{1}(r-1)^{q-s-1} + \binom{q-s}{2}(r-2)^{q-s-2} - \ldots + (-1)^{q-s}$$

per $(-1)^s [1, q]^s$, e sommiamo per $s=0, 1, \ldots, q$, si ottiene, in virtù di (5), per $r<q$, la formola (4).

2. Premesso ciò, indichiamo con $k(n)$ il numero dei fattori primi diversi di n $[k(1)=0]$, e con $\mu(n)$ la funzione di *Möbius*, nulla se n è divisibile per un quadrato ed uguale a $(-1)^{k(n)}$ se n è costituito da fattori primi tutti differenti.

Si ponga poi

$$\mu_r(n) = k^r(n)\,\mu(n). \tag{7}$$

L'integrale numerico di $\mu_r(n)$, cioè la somma dei valori che prende $\mu_r(x)$, quando x percorre la successione dei divisori di n, è, con una notazione già adottata dal *Cesàro*, e da altri,

$$\int \mu_r(n) = \mu_r(1) - \Sigma\mu_r(a) + \Sigma\mu_r(ab) - \Sigma\mu_r(abc) + \ldots,$$

$a, b, c, \ldots$ essendo i fattori primi diversi di n, e, per $r>0$, in virtù di (7),

$$\int \mu_r(n) = (-1)^{k(n)}\left\{k^r(n) - \binom{k(n)}{1}[k(n)-1]^{r-1} + \right.$$
$$\left. + \binom{k(n)}{2}[k(n)-2]^{r-2} - \ldots\right\},$$

e in virtù di (1),

$$\int \mu_r(n) = (-1)^{k(n)}\Delta^{k(n)}0^r. \tag{8}$$

In particolare, *se* n *è costituito da più di* r *fattori primi diversi*, è

$$\int \mu_r(n) = 0.$$

È questa un'estensione di una nota proprietà della funzione di *Möbius*.

3. Ora se $f(n)$, $g(n)$ sono due funzioni numeriche, si ha, com'è facile dimostrare,

$$\Sigma f(d) \int g\left(\frac{n}{d}\right) = \Sigma g(d) \int f\left(\frac{n}{d}\right), \tag{9}$$

essendo le somme estese a tutti i divisori d di n. Se in questa si pone $g(n) = \mu_r(n)$, in virtù di (8), si ottiene

$$\Sigma f\left(\frac{n}{d}\right)(-1)^{k(d)}\Delta^{k(d)}0^r = \Sigma \mu_r(d) \int f\left(\frac{n}{d}\right),$$

e quindi, indicando con δ_i un divisore di n, che è costituito da potenze di i fattori primi diversi ($\delta_0 = 1$), con $a_1, a_2, \ldots, a_{k(n)}$ i fattori primi differenti di n, e denotando con $F(n)$ l'integrale numerico di $f(n)$, si ha

$$\Delta^1 0^r \Sigma f\left(\frac{n}{\delta_1}\right) - \Delta^2 0^r \Sigma f\left(\frac{n}{\delta_2}\right) + \Delta^3 0^r \Sigma f\left(\frac{n}{\delta_3}\right) - \ldots =$$
$$= 1^r \Sigma F\left(\frac{n}{a_1}\right) - 2^r \Sigma F\left(\frac{n}{a_1 a_2}\right) + 3^r \Sigma F\left(\frac{n}{a_1 a_2 a_3}\right) - \ldots . \tag{10}$$

4. Questa formola fornisce innumerevoli identità aritmetiche e algebriche.

Per es., supponiamo che sia $f(n) = 1$, ed n costituito da fattori primi tutti differenti, e sia m il loro numero; sarà $F(n) = 2^m$ e la (10) darà

$$\binom{m}{1}\Delta^1 0^r - \binom{m}{2}\Delta^2 0^r + \binom{m}{3}\Delta^3 0^r - \ldots =$$
$$= 1^r\binom{m}{1}2^{m-1} - 2^r\binom{m}{2}2^{m-2} + 3^r\binom{m}{3}2^{m-3} - \ldots$$

Per ottenere la (1) basta supporre ancora che m sia costituito da fattori primi tutti differenti e in numero di m, e la funzione $f(n)$ abbia il valore 1 per $n = 1$, e 0 per $n > 1$. Questa funzione è l'integrale numerico di $\mu(n)$, la (10) quindi, per $f(n) = \mu(n)$, e sempre nell'ipotesi che n sia costituito da fattori primi tutti differenti e in numero di m, fornisce

$$\binom{m}{1}\Delta^1 0^r + \binom{m}{2}\Delta^2 0^r + \ldots + \binom{m}{r}\Delta^r 0^r = m^r.$$

Da questa si trae, com'è noto, la formola

$$1^r + 2^r + \ldots + (p-1)^r = \binom{p}{2}\Delta^1 0^r + \binom{p}{3}\Delta^2 0^r + \ldots + \binom{p}{r+1}\Delta^r 0^r. \tag{11}$$

5. Vogliamo ora dalla (10) dedurre l'espressione di $\Sigma f\left(\frac{n}{\delta_r}\right)$ mediante i valori dell'integrale numerico di $f(n)$.

Se nella (10) si muta r successivamente in $1, 2, \dots, r$, si ottiene un sistema di r equazioni lineari nelle somme $\Sigma f\left(\frac{n}{\delta_i}\right)$ $(i = 1, 2, \dots, r)$, per risolvere il quale basterà moltiplicare la prima equazione per $[1, r]^r$, la seconda per $-[1, r]^{r-1}$, la terza per $[1, r]^{r-2}$, ... l's^{esima} per $[-1]^{s-1}[1, r]^{r-s}$, ecc.; dopo ciò sommando e tenendo presenti le identità (4), (5), (6), si ottiene

$$\Sigma f\left(\frac{n}{\delta_r}\right) = \Sigma F\left(\frac{n}{a_1 a_2 \dots a_r}\right) - \binom{r+1}{1} \Sigma F\left(\frac{n}{a_1 a_2 \dots a_{r+1}}\right) + $$
$$+ \binom{r+2}{2} \Sigma F\left(\frac{n}{a_1 a_2 \dots a_{r+2}}\right) - \dots \quad (12)$$

Questa formola, per $r = 0$, dà *la derivata numerica* di $F(n)$, cioè la funzione che ha per integrale numerico $F(n)$ [1]

$$f(n) = \delta F(n) = F(n) - \Sigma F\left(\frac{n}{a}\right) + \Sigma F\left(\frac{n}{ab}\right) - \dots \quad (13)$$

La (11) fornisce in particolare se per $f(n)$ si pone la funzione $\varphi(n)$, che rappresenta la totalità dei numeri non superiori ad n e primi con n, per cui è $\int \varphi(n) = n$:

$$\Sigma \varphi\left(\frac{n}{\delta_r}\right) = \Sigma \frac{n}{a_1 a_2 \dots a_r} - \binom{r+1}{1} \Sigma \frac{n}{a_1 a_2 \dots a_{r+1}} + $$
$$+ \binom{r+2}{2} \Sigma \frac{n}{a_1 a_2 \dots a_{r+2}} - \dots, \quad (14)$$

e se si fa $f(n) = \mu(n)$, si ottiene

$$\Sigma \mu\left(\frac{n}{\delta_r}\right) = (-1)^r \binom{k(n)}{r} \mu(n), \quad (15)$$

ecc. ecc.

Supponiamo che la funzione $f(n)$ sia *composta*, cioè per ogni coppia di numeri (interi) m, m' si abbia

$$f(m) f(m') = f(mm'),$$

allora, se nella (10) si pone

$$\frac{1}{f(n)} = \psi(n),$$

sarà $\psi(n)$ una funzione composta, e se $\Psi(n)$ è il suo integrale numerico si avrà

$$F(n) = \frac{\Psi(n)}{\psi(n)},$$

e la (12) dà

$$\Sigma \psi(\delta_r) = \Sigma \Psi\left(\frac{n}{a_1 a_2 \dots a_r}\right) \psi(a_1 a_2 \dots a_r) - $$
$$- \binom{r+1}{1} \Sigma \Psi\left(\frac{n}{a_1 a_2 \dots a_{r+1}}\right) \psi(a_1 a_2 \dots a_r) + $$
$$+ \binom{r+2}{2} \Sigma \Psi\left(\frac{n}{a_1 a_2 \dots a_{r+2}}\right) \psi(a_1 a_2 \dots a_{r+2}) - \dots . \quad (16)$$

---

(1) DEDEKIND, *J. f. Math.*, 54, 1857. p. 1; LIOUVILLE, *J. de Math.*, (2), 2, 1857, p. 110.

Si ottiene così una espressione della somma dei valori che assume la funzione composta $\psi(x)$ per tutti i divisori di n formati con potenze di r fattori primi differenti.

Il numero $N_r(n)$ di questi divisori si ottiene facendo in (16) $\psi(x)=1$:

$$N_r(n) = \Sigma\nu\left(\frac{n}{a_1 a_2 \ldots a_r}\right) - \binom{r+1}{1}\Sigma\nu\left(\frac{n}{a_1 a_2 \ldots a_{r+1}}\right) + \ldots.$$

e la loro somma $S_r(n)$ per $\psi(x)=x$:

$$S_r(n) = \Sigma\,\sigma\left(\frac{n}{a_1 a_2 \ldots a_r}\right) a_1 a_2 \ldots a_r - \binom{r+1}{1}\Sigma\,\sigma\left(\frac{n}{a_1 a_2 \ldots a_{r+1}}\right) a_1 a_2 \ldots a_{r+1} + \ldots$$

$\nu(n)$, $\sigma(n)$ rappresentando rispettivamente la totalità e la somma dei divisori di n.

6. Or si potrebbe domandare quale sia l'espressione di $\Sigma f(\delta_r)$ nel caso che $f(n)$ non sia una funzione composta. Per rispondere a tale questione, osserviamo dapprima che, se si indica con $f(d, n)$ la somma dei valori che prende $f(x)$ per i divisori di n che sono multipli di d, e $g(n)$ è una funzione numerica qualunque, si ha, come è facile dimostrare,

$$\Sigma f(d, n)\, g(d) = \Sigma f(d) \int g(d)\,, \qquad (17)$$

essendo le somme estese ai divisori d di n.

Indicando quindi con $\omega_r(n)$ una funzione numerica che è uguale a 1 se n è costituito da potenze di r fattori primi diversi, e 0 in ogni altro caso, si ha evidentemente

$$\Sigma f(\delta_r) = \Sigma f(d)\, \omega_r(d)\,.$$

Per applicare la (17) poniamo

$$\int g(n) = \omega_r(n)\,,$$

donde, per la (13),

$$g(n) = \partial\, \omega_r(n) = \Sigma\, \omega_r(d)\, \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \Sigma\mu\left(\frac{n}{\delta_r}\right)$$

e infine, per la (15),

$$g(n) = (-1)^r \binom{k(n)}{r} \mu(n)\,.$$

La (17) quindi fornisce la formola

$$\Sigma f(\delta_r) = \Sigma f(a_1 a_2 \ldots a_r, n) - \binom{r+1}{1}\Sigma f(a_1 a_2 \ldots a_{r+1}, n) + \binom{r+2}{2}\Sigma f(a_1 a_2 \ldots a_{r+2}, n) - \ldots,$$

fonte, anch'essa, di innumerevoli identità aritmetiche.

MICHELE CIPOLLA
(*Corleone*).

UN TEOREMA SUL "MODULO PRINCIPALE" DI UNA FUNZIONE

1. Un pregevole lavoro di Nekrassoff sulla serie di Lagrange, (1) mi ha suggerito un teorema sul *modulo principale* di una funzione, teorema, che non mi sembra privo di un certo interesse.

Premettiamo le seguenti considerazioni:

Sia $\psi(z)$ una funzione della variabile complessa $z = re^{i\varphi}$, finita, continua e monodroma per tutti i valori di z pei quali è soddisfatta la limitazione:

(1) $$k < r < k_1.$$

Se R è il modulo di $\psi(z)$, finchè è soddisfatta la (1), R sarà una funzione finita e continua di φ e, col variare di φ da 0 a 2π, attraverserà certi massimi ciascuno dei quali è una funzione di r.

Indichiamo con:

(2) $$M_1(r), \quad M_2(r), \quad M_3(r), \ldots$$

questi massimi; chiameremo *massimo principale* il massimo dei numeri (1), (2) cioè quel numero $M(r)$ che, per ogni valore di r, soddisfa simultaneamente le relazioni:

$$M(r) \geqslant M_1(r), \qquad M(r) \geqslant M_2(r), \ldots$$

in una almeno delle quali, deve valere il segno di eguaglianza.

Avremo intanto, in generale:

$$M_n(r) = R(r, \varphi_n)$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

dove φ_n è una radice dell'equazione:

(3) $$\frac{\partial R}{\partial \varphi} = 0.$$

Col variare di r, uno dei massimi della successione (1) può diventare un minimo e viceversa; e così anche può sparire o comparire quando, col variare di r, una radice reale della (3) diventa complessa e viceversa. Da ciò segue, che il numero dei massimi della successione (2) non è costante pei diversi valori di r.

La funzione $M(r)$ può altresì, cambiar forma col variare di r, nel senso che, per valori diversi di r, può essere rappresentata da funzioni diverse della successione (2).

---

(1) *Math. Ann.* Band. 31; pag. 337.

(2) Certamente esistente per le limitazioni fatte sulla funzione $\psi(z)$.

2. Si dimostra [1] che, tra k e k_1, la funzione $M(r)$ non può aver massimi e può avere, al più, un minimo.

Se esiste, indichiamolo con μ e indichiamo con ρ il valore di r per il quale la funzione $M(r)$ assume il valore μ; diremo che μ è il *modulo principale* della funzione $\psi(z)$.

Se il modulo principale è un valore che $|\psi(z)|$ assume per un valore ζ di z ($|\zeta| = \rho$), radice dell'equazione

$$\psi'(z) = 0 \tag{4}$$

cioè, se la (4) ha una radice ζ che soddisfa le condizioni:

$$\mu = |\psi(\zeta)|, \qquad \rho = |\zeta| \tag{5}$$

diremo che μ è un *modulo principale critico*; nel caso contrario, cioè, se la (5) non ha punte radici che soddisfino le (5) diremo che μ è un *modulo principale non critico.*

3. Poichè è utile, in molte questioni, sapere se il *modulo principale* di una funzione sia o no *critico*, vogliamo ora stabilire un teorema che ce ne dia la condizione necessaria e sufficente.

Facciamo, all'uopo, le seguenti considerazioni:

Il valore μ del *modulo principale* della funzione $\psi(z)$, sarà, per quello che abbiamo detto al n. 2, assunto dalla funzione $M(r)$ in un unico punto ρ. Sarà dunque:

$$\mu = M(\rho).$$

Indichiamo con:

$$\overline{M_1(r)}, \qquad \overline{M_2(r)}, \ldots \tag{6}$$

quelli, fra i numeri della successione (2), che per $r = \rho$ hanno il valore μ, per cui:

$$\overline{M_1(\rho)} = \overline{M_2(\rho)} = \ldots = \mu.$$

Essi corrisponderanno a certe radici

$$\varphi_1(r), \qquad \varphi_2(r), \ldots$$

dell'equazione (3); indichiamo con:

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \varphi_3, \ldots$$

i valori di queste radici per $r = \rho$. Allora:

$$z_1 = \rho e^{i\varphi_1}, \qquad z_2 = \rho e^{i\varphi_2}, \ldots$$

sono tutti e soli valori di z di modulo ρ pei quali:

$$\mu = |\psi(z)|.$$

---

[1] NEKRASSOFF, *Math. Ann.* B. 31; pag. 337.

Supporremo che si abbia:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \varphi^2} \neq 0$$

nel punto (ρ, φ_i) $(i = 1, 2, \ldots)$; così dalla teoria delle funzioni implicite sappiamo, che l'equazione (3), essendo per il valore $r = \rho$ soddisfatta da un valore φ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ di φ, definisce completamente una funzione φ di r finita e continua nel punto $r = \rho$ (ove essa assume il valore φ_i) insieme alla derivata.

Ciò premesso, è facile decidere se il *modulo principale* è *critico*.

Affinchè sia:

$$\psi'(\rho, e^{i\omega}) = 0$$

bisogna e basta che risulti:

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial R}{\partial \varphi} = 0$$

calcolando le derivate per $r = \rho$ e $\varphi = \omega$. [1]

Ora, in virtù delle ipotesi fatte, si ha:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial \varphi}\right)_{\substack{r=\rho \\ \varphi=\varphi_i}} = 0 \qquad (7)$$

$$(i = 1, 2, \ldots).$$

D'altra parte, in virtù della definizione dei numeri della successione (6), si ha:

$$M'_i(r) = \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\partial R}{\partial \varphi}\frac{d\varphi_i(r)}{dr} \quad (i = 1, 2, \ldots) \qquad (8)$$

dove, nelle derivate $\frac{\partial R}{dr}$ e $\frac{\partial R}{\partial \varphi}$ bisogna porre:

$$\varphi = \varphi_i(r).$$

---

(1) Posto:

$$\psi(z) = Re^{i\Phi}$$

si ha infatti:

$$\psi'(z)\frac{z}{r} = e^{i\Phi}\left(\frac{\partial R}{\partial r} + iR\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right); \qquad \psi'(z)\,zi = e^{i\Phi}\left(\frac{\partial R}{\partial \varphi} + iR\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right)$$

e dal confronto di queste equazioni:

$$\frac{\partial R}{\partial \varphi} = -rR\frac{\partial \Phi}{\partial r}; \qquad r\frac{\partial R}{\partial r} = R\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}.$$

La condizione è adunque sufficiente. Ed è anche necessaria perchè, se $\psi'(z) = 0$, dalle equazioni:

$$\frac{\partial R}{\partial r} + iR\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial R}{\partial \varphi} + iR\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0$$

si ricava:

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial R}{\partial \varphi} = 0.$$

Facciamo nella (8), $r = \rho$; per la (6), si ha:

$$\overline{M'_i(\rho)} = \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)_{\substack{r=\varrho \\ \varphi=\varphi_i}}. \tag{9}$$

Se supponiamo che μ sia *critico*, dovrà esser nulla almeno una delle quantità:

$$\psi'(z_1), \quad \psi'(z_2)$$

poniamo $\psi'(z_j)$. Allora, in virtù delle osservazioni fatte, e per la (9), risulta:

$$M'_j(\rho) = 0. \tag{10}$$

Inversamente, supposta verificata la (10), dalle (8) e (7) risulta:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)_{\varrho,\varphi_j} = \left(\frac{\partial R}{\partial \varphi}\right)_{\varrho,\varphi_j} = 0$$

cioè:

$$\psi'(z_j) = 0.$$

Si avrà dunque:

$$\mu = |\psi(z_j)|, \qquad |z_j| = \rho, \qquad \psi'(z_j) = 0$$

e il minimo μ è *critico.*

Possiamo dunque enunciare il

TEOREMA. — *Siano*:

$$\overline{M_1(r)}, \quad \overline{M_2(r)}, \quad \overline{M_3(r)}, \dots \tag{11}$$

i numeri della successione (2) *che per* $r = \rho$ *hanno il valore del* **modulo principale** μ *e siano*:

$$\varphi_1(r), \quad \varphi_2(r), \quad \varphi_3(r), \dots$$

le radici dell'equazione (3) *cui essi corrispondono; se:*

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \varphi_3, \dots$$

sono i valori di queste radici per $r = \rho$ *e se:*

$$\left(\frac{\partial^2 R}{\partial \varphi^2}\right)_{\substack{r=\varrho \\ \varphi=\varphi_i}} \neq 0$$
$$(i = 1, 2, \dots)$$

condizione necessaria e sufficiente affinchè il **modulo principale** *della funzione* $\psi(z)$ *sia* **critico** *è, che fra i numeri* (11) *ve ne sia almeno uno la cui derivata rispetto a* r, *si annulli per* $r = \rho$.

4. Se interpretiamo r e m come coordinate cartesiane ortogonali di un punto del piano, pel punto $(r = \rho, m = \mu)$ passerà, in generale, la curva:

$$(m = M_i(r)$$

e la condizione necessaria e sufficiente affinchè μ sia *critico* è che tra queste curve ve ne sia almeno una che tocchi la retta $m = \mu$.

5. Si osservi in particolare, che se la serie (11) contiene un solo elemento, la condizione necessaria e sufficiente affinchè μ sia *critico* è $M'(\rho) = 0$. Ma il teorema superiore ci rivela la possibilità di avere un minimo *critico* senza che sia $M'(\rho) = 0$. Se, infatti si ha:

$$M(r) = M_1(r) \qquad \text{per } r < \rho$$
$$M(r) = M_2(r) \qquad \text{per } r > \rho$$

se la serie (11) contiene almeno un terzo elemento $\overline{M_3(r)}$ in modo che si abbia:

$$M'_1(\rho) \neq 0, \qquad M'_2(\rho) \neq 0, \qquad M'_3(\rho) = 0,$$

il *modulo principale* μ sarà *critico* senza che si annulli la derivata, rispetto a r, di $M(r)$, per $r = \rho$.

Prof. Guido Sadun.

(*Cagli*)

EQUAZIONI LE CUI RADICI FORMANO UNA PROGRESSIONE GEOMETRICA

1. Il sig. Occhipinti in una recente *Nota* [1] si è proposto di cercare un criterio per decidere quando è che un'equazione intera del grado n

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (1)$$

ha le radici del tipo

$$x_s = r\rho^{s-1} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \qquad (2)$$

e poi di risolverla, esprimendo r e ρ mediante i coefficienti.

L' A. enuncia il teorema: *la risoluzione di un'equazione che ammette le radici in progressione geometrica si riduce alla risoluzione di una equazione del 3° grado.*

Ora è lecito di dubitare della sua validità, perchè da esso seguirebbe in particolare, ed in contraddizione con un classico teorema di Gauss, che *l'equazione binomia* $x^n - 1 = 0$ *si può risolvere algebricamente mediante una equazione del* 3° *grado.*

L'A. nell'enunciare il teorema non ha tenuto conto che nella sua risolvente del 3° grado

$$\rho^3 + \frac{a_1^2 a_n^{\frac{2}{n}} - 2a_2^2 - (a_1^2 - a_2)^2}{a_2}\rho^2 + \frac{a_2^2 - a_1^2 a_n^{\frac{2}{n}} + 2(a_1^2 - a_2)^2}{a_1^2 - a_2}\rho - 1 = 0 \qquad (3)$$

---

(1) Anno XX, fasc. IV (1905) del *Periodico*.

e nell'altra

$$r = -a_n^{\frac{1}{n}} : \rho^{\frac{n-1}{2}} \tag{4}$$

che, conosciuto ρ, dà r, vi è il simbolo $a_n^{\frac{1}{n}}$, e che perciò *alla risoluzione della* (3) *bisogna premettere quella dell'equazione binomia* $x^n - a_n = 0$.

Ma con questa correzione quel teorema perde ogni interesse, anzi le formole (3) e (4), anzichè risolvere la quistione, non fanno che complicarla, trasformandola in un'altra di Algebra Superiore, mentre che, come proverò, la risoluzione di un'equazione le cui radici formano una progressione geometrica si riduce a quella di una semplicissima equazione del 2° grado, tranne che per tipi speciali di equazioni.

Ad ogni modo le (3) e (4) son sempre insufficienti pel calcolo di ρ ed r. Infatti la (3) non rappresenta un'equazione sola ma n, essendo appunto n i valori di $a_n^{\frac{1}{n}}$; e la (4) per ogni valor di ρ ne dà 2 per r; dunque le (3) e (4) dànno $6n$ coppie di valori per ρ e r. Ed evidentemente son troppe per essere accettabili tutte.

Dunque la quistione è ben lungi dall'essere risoluta e merita di esser ripresa *ab ovo*.

2. Cercherò anzitutto un criterio per discernere le equazioni a radici in progressione geometrica.

Per le note relazioni di *Girard* tra i coefficienti e le radici di un'equazione, si ha

$$-a_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r\,\frac{1-\rho^n}{1-\rho}, \tag{5}$$

$$(-1)^n a_n = x_1 x_2 \ldots x_n = r^n \rho^{\frac{n(n-1)}{2}}, \tag{6}$$

$$(-1)^{n-1} a_{n-1} = x_1 x_2 \ldots x_n \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) = r^{n-1}\,\frac{1-\rho^n}{1-\rho}\,\rho^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \tag{7}$$

poi, quadrando la (5),

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + 2a_2 = a_1^2$$

ossia

$$r^2\,\frac{1-\rho^{2n}}{1-\rho^2} + 2a_2 = a_1^2 \tag{8}$$

da cui

$$a_2 = r^2 \rho\,\frac{(1-\rho^{n-1})(1-\rho^n)}{(1-\rho)^2(1+\rho)}. \tag{8)'$$

3. Supponiamo anzitutto $a_{n-1} \neq 0$, cioè che non sia $r = 0$ o $\rho = 0$ o ρ radice n^{ma} dell'unità; allora sarà pure $a_1 \neq 0$ e $a_n \neq 0$ e si avrà

$$\frac{a_1 a_n}{a_{n-1}} = r^2 \rho^{n-1} \tag{9}$$

ossia

$$\frac{a_1 a_n}{a_{n-1}} = x_s x_{n-s} \qquad (s = 1,\ 2, \ldots, n). \tag{10}$$

Questa relazione dà il prodotto delle due radici estreme della progressione e di due radici equidistanti dalle estreme, e per n *dispari dà come radice dell'equazione uno dei due valori di* $\sqrt{\frac{a_1 a_n}{a_{n-1}}}$.

La (9) è dunque necessaria affinchè le radici formino una progressione geometrica. Essa esprime che, se nell'equazione si cambia x in $\frac{a_1 a_n}{a_{n-1} x}$, l'equazione trasformata

$$\sum_{s=0}^{n} a_s \left(\frac{a_1 a_n}{a_{n-1} x}\right)^{n-s} = 0 \qquad \text{o} \qquad \sum_{s=0}^{n} a_{n-s} \left(\frac{a_1 a_n}{a_{n-1}}\right)^{s} x^{n-s} = 0,$$

ove $a_0 = 1$, deve avere le stesse radici; e però dev' essere

$$a_s a^s_{n-1} = a_1^s a_{n-s} a_n^{s-1} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n;\ a_0 = 1).$$

Queste relazioni son necessarie, ma non sono indipendenti. Infatti per $s = n$ dànno

$$a^n_{n-1} = a_1^n a_n^{n-2} \tag{11}$$

e, delle rimanenti, due che corrispondono a valori di s complementari rispetto ad n (cioè s ed $n - s$), moltiplicate tra loro dànno la (11); poi per $s = 1$ si ha un' identità; dunque basta dare ad s i valori $2, 3, \ldots, k, n$ ove $k = \left[\frac{n}{2}\right]$ $\left(\text{massimo intero contenuto in } \frac{n}{2}\right)$.

Posto

$$y_s = x_s \sqrt{\frac{a_{n-1}}{a_1 a_n}} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

si ha per la (10)

$$y_s \cdot y_{n-s} = x_s x_{n-s} \frac{a_{n-1}}{a_1 a_n} = 1;$$

dunque, eseguendo sulla (1) la trasformazione

$$x = y \sqrt{\frac{a_1 a_n}{a_{n-1}}}, \tag{12}$$

si avrà un' equazione autoreciproca $\varphi(y) = 0$, la quale, quando n è dispari, avrà per radice 1 o -1, secondo che il valore scelto nella (12) pel radicale è uguale o è opposto al valore che, come sappiamo, è radice della (1).

Se (1) ha le radici del tipo (2), sarà verificata la (9), e però $\varphi(y) = 0$ avrà radici del tipo

$$y_s = r\rho^{s-1} \cdot \frac{1}{r} \rho^{\frac{1-n}{2}} = \rho^{s - \frac{n+1}{2}} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{13}$$

Viceversa se $\varphi(y) = 0$ ha le radici di questo tipo, per la (12) la (1) avrà le radici in progressione geometrica.

Affinchè poi $\varphi(y) = 0$ abbia le radici del tipo (13) è necessario e sufficiente che le equazioni

$$\varphi\left(y^{s - \frac{n+1}{2}}\right) = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

abbiano tutte una stessa radice in comune; anzi, essendo $\varphi(y)=0$ autoreciproca, basta prendere $s=k+1,\ k+2,\ldots,n$ se $n=2k$, e $s=k+2,\ k+3,\ldots,n$ se $n=2k+1$, e nel primo caso si può ad y sostituire y^2, per evitare esponenti fratti.

Raccogliendo, si ha il

Teorema. — *Affinchè l'equazione* (1), *in cui* $a_{n-1} \neq 0$, *abbia le radici in progressione geometrica è necessario e sufficiente:*

1° *che sia* $a_1 \neq 0$ *e* $a_n \neq 0$;

2° *che sia*

$$a_s a^s_{n-1} = a_1^s a_{n-s} a_n^{s-1} \qquad \left(s=2,\ 3,\ldots,k,\ n;\ k=\left[\frac{n}{2}\right]\right);$$

3° *che, detta* $\varphi(y)=0$ *l'equazione che si deduce dalla* (1) *con la trasformazione*

$$x=y\sqrt{\frac{a_1 a_n}{a_{n-1}}},$$

le equazioni

$$\varphi(y)=0,\quad \varphi(y^3)=0,\ldots,\varphi(y^{2k-1})=0 \qquad \text{se } n=2k$$
$$\varphi(y)=0,\quad \varphi(y^2)=0,\ldots,\varphi(y^k)=0, \qquad \text{se } n=2k+1$$

abbiano una stessa radice in comune.

Scolio. — Quando $n=2k+1$ si può a $\varphi(y)$ sostituire $\dfrac{\varphi(y)}{y-1}$ o $\dfrac{\varphi(y)}{y+1}$, secondochè $\varphi(y)=0$ ammette per radice 1 o -1.

In pratica l'applicazione della terza parte di questo criterio offre gravi difficoltà. Così per un'equazione appena del 4° grado, richiede la formazione del risultante delle equazioni $\varphi(y)=0$, $\varphi(y^3)=0$ dei gradi 4 e 12 rispettivameute.

Darò a questa terza parte un'altra forma molto più utile in pratica, almeno per le equazioni di grado non troppo alto.

L'equazione autoreciproca $\varphi(y)=0$, privata della radice 1 o -1 se $n=2k+1$, sarà del tipo

$$b_0(y^{2k}+1)+b_1(y^{2k-1}+y)+\ldots+b_{k-1}(y^{k+1}+y^{k-1})+b_k y^k=0 \qquad (14)$$

o

$$b_0\left(y^k+\frac{1}{y^k}\right)+b_1\left(y^{k-1}+\frac{1}{y^{k-1}}\right)+\ldots+b_{k-1}\left(y+\frac{1}{y}\right)+b_k=0.$$

Posto

$$y+\frac{1}{y}=z,$$

è noto che le somme

$$y^2+\frac{1}{y^2},\quad y^3+\frac{1}{y^3},\ldots,y^k+\frac{1}{y^k}$$

si esprimono come funzioni intere dei gradi $2, 3,\ldots,k$ in z mediante la relazione ricorrente

$$y^s+\frac{1}{y^s}=\left(y^{s-1}+\frac{1}{y^{s-1}}\right)z-\left(y^{s-2}+\frac{1}{y^{s-2}}\right) \qquad (s=2,3,\ldots)$$

e che l'equazione (14) si trasforma in un'altra $\psi(z)=0$ di grado k. Ora se le radici della (14) sono del tipo

$$\left.\begin{array}{ll} y^{-k},\ y^{1-k},\ldots,y^{-1},\ y,\ y^2,\ldots,y^k & \text{se } n=2k+1 \\ y^{1-2k},\ y^{3-2k},\ldots,y^{-1},\ y,\ y^3,\ldots,y^{2k-1} & \text{se } n=2k \end{array}\right\} \tag{15}$$

come esige il criterio precedente, le radici di $\psi(z)=0$ saranno appunto le somme

$$z_1=y+\frac{1}{y},\quad z_2=y^2+\frac{1}{y^2},\ldots,z_k=y^k+\frac{1}{y^k}\quad \text{se } n=2k+1$$

$$z_1=y+\frac{1}{y},\quad z_3=y^3+\frac{1}{y^3},\ldots,z_{2k-1}=y^{2k-1}+\frac{1}{y^{2k-1}}\quad \text{se } n=2k$$

e però saranno esprimibili tutte mediante la prima z_1 con la relazione ricorrente

$$z_s=z_{s-1}z_1-z_{s-2}\qquad (s=2,3,\ldots;\ z_0=2). \tag{16}$$

Viceversa: se le radici $z_1\, z_2,\ldots,z_k$ se $n=2k$, o $z_1\, z_3,\ldots,z_{2k-1}$ se $n=2k-1$, di $\psi(z)=0$ sono tutte esprimibili come funzioni intere di z_1 mediante la (16), dette $y_s\varphi\frac{1}{y_s}$ le radici di $\varphi(y)=0$ che corrispondono a z_s, si ha

$$y_s+\frac{1}{y_s}=\left(y_{s-1}+\frac{1}{y_{s-1}}\right)\left(y_1+\frac{1}{y_1}\right)-\left(y_{s-2}+\frac{1}{y_{s-2}}\right)\quad (y_0=1);$$

in particolare

$$y_2+\frac{1}{y_2}=\left(y_1+\frac{1}{y_1}\right)\left(y_1+\frac{1}{y_1}\right)-2=y_1^2+\frac{1}{y_1^2}$$

ed è poi facile vedere col *metodo di induzione completa da* s *a* s+1 che in generale

$$y_s+\frac{1}{y_s}=y_1^s+\frac{1}{y_1^s}$$

ossia

$$(y_s-y_1^s)(y_sy_1^s-1)=0,$$

da cui $y_s=y_1^s$ o $y_s=y_1^{-s}$ e però la (14) ha le radici del tipo (15), come esige il criterio.

Dunque la terza condizione del teorema precedente può essere sostituita dall'altra: *che detta* z_1 *una certa radice dell'equazione* $\psi(z)=0$ *di grado* k, *a cui si abbassa* $\varphi(y)=0$ *con la trasformazione* $y+\frac{1}{y}=z$, *le altre radici sieno* $z_2\, z_3\ldots z_k$ *se* $n=2k+1$, o $z_3\, z_5\ldots z_{2k-1}$ *se* $n=2k$ *essendo in generale* z_s *quella funzione razionale intera di grado* s *in* z_1 *che si deduce dalla relazione ricorrente*

$$z_s=z_{s-1}\,z_1-z_{s-2}\qquad (z_0=2).$$

4. Supponiamo $a_{n-1}=0$.

Per la (7) sarà $r=0$ o $\rho=0$ o $1+\rho+\ldots+\rho^{n-1}=0$.

Per essere $r=0$, ossia $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$, la (1) deve ridursi a $x^n=0$ e per essere $\rho=0$, ossia $x_1=r$, $x_2=\ldots=x_n=0$, la (1) deve ridursi a $x^n-rx^{n-1}=0$ e quindi a $x^n+a_1x^{n-1}=0$, essendo $-a_1=x_1+\ldots+x_n=r$.

Che se poi $1+\rho+\ldots+\rho^{n-1}=0$, cioè se ρ è una radice n^{ma} dell'unità, detto s l'*esponente cui essa appartiene* (divisore di n) cioè supposto ρ radice primitiva dell'equazione $x^s-1=0$, sarà evidentemente

$$f(x)=(x^s-r)^{\frac{n}{s}}=x^n-\frac{n}{s}r^sx^{n-s}+\ldots$$

quindi

$$a_s=-\frac{n}{s}r^s,$$

da cui

$$r^s=-\frac{s}{n}a_s,$$

e però

$$f(x)=\left(x^s+\frac{s}{n}a_s\right)^{\frac{n}{s}}.$$

Si ha così il

Teorema. — *Affinchè l'equazione* (1), *in cui* $a_{n-1}=0$, *abbia le radici in progressione geometrica è necessario e sufficiente che sia* $f(x)=x^n$ *o* $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}$, *o che, detto* a_s *il primo coefficiente che non è nullo, sia* s *un divisore di* n *maggiore di* 1 *e sia*

$$f(x)=\left(x^s+\frac{s}{n}a_s\right)^{\frac{n}{s}}.$$

5. Applichiamo questi risultati alle equazioni del 3° 4° e 5° grado. Sia

$$f(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0. \qquad (17)$$

Se $a_2\neq0$, pel teorema del § 3 dev'essere anche $a_1\neq0$, $a_3\neq0$ ed $a_3a_2^3=a_1^3a_3^2$ ossia $a_2^3=a_1^3a_3$. Se poi $a_2=0$, pel teorema del § 4, dev'essere o $f(x)=x^3$ o $f(x)=x^3+a_1x^2$ o $f(x)=x^3+a_3$; ma applicando illecitamente la $a_2^3=a_1^3a_3$ a questo caso, si ha $a_3=0$ o $a_1=0$ e si trovano appunto i tipi precedenti, dunque quella condizione è necessaria e sufficiente anche nel caso $a_2=0$.

Dunque: *la condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione generale* (17) *del* 3° *grado abbia le radici in progressione geometrica è*

$$a_2^3=a_1^3a_3.$$

Corollario. — *L'equazione* $x^3+px+q=0$ *non può avere le radici in progressione geometrica, a meno che non si riduca a* $x^3=0$.

6. Sia

$$f(x)=x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0. \qquad (18)$$

Se $a_2\neq0$, la prima condizione del teorema del § 3 impone che sia

$$a_1\neq0 \quad \text{e} \quad a_4\neq0 \qquad (19)$$

e la seconda che sia

$$a_2a_3^2 = a_1^2a_2a_4 \qquad \text{e} \qquad a_3^4 = a_1^4a_4^2. \tag{20}$$

Supposto che queste condizioni si verifichino, eseguendo sulle (18) la trasformazione $x = \alpha y$, ove $\alpha = \sqrt{\frac{a_1a_4}{a_3}}$, l'equazione trasformata

$$\varphi(y) = \alpha^4y^4 + a_1\alpha^3y^3 + a_2\alpha^2y^2 + a_3\alpha y + a_4 = 0$$

sarà autoreciproca e si potrà scrivere

$$\varphi(y) = a_4(y^4+1) + a_3\alpha(y^3+y) + a_2\alpha^2y^2 = 0;$$

dividendola per y^2 e ponendo $y + \frac{1}{y} = z$, essa si riduce a

$$\psi(z) = a_3a_4z^2 + a_3^2\alpha z + (a_1a_2 - 2a_3)a_4 = 0,$$

chè $\alpha^2 = \frac{a_1a_4}{a_3}$. Dette z_1 e z_2 le radici di questa equazione dev'essere $z_2 = z_1^3 - 3z_1$, ossia $z_1 + z_2 = z_1^3 - 2z_1$; ma $z_1 + z_2 = -\frac{a_3\alpha}{a_4}$, dunque

$$a_4z_1^3 - 2a_4z_1 + a_3\alpha = 0.$$

Sottraendo questa moltiplicata per a_3, da $z_1\psi(z_1) = 0$, si ha

$$a_3^2\alpha z_1^2 + a_1a_2a_4z_1 - a_3^2\alpha = 0$$

e sottraendo questa moltiplicata per a_4 da $\alpha a_3\psi(z_1) = 0$, risulta

$$a_1a_4(a_3^2 - a_2a_4)z_1 + a_3a_4\alpha(a_1a_2 - a_3) = 0;$$

ricavando da questa il valore di z_1 e sostituendolo nella precedente si ha, dopo facili sviluppi e riduzioni,

$$-a_1a_3^5 + a_3^4a_4 + a_1a_2a_3^3a_4 - 2a_1a_2^2a_3a_4^2 + a_1^2a_2^3a_4^2 = 0. \tag{21}$$

Dunque se $a_3 \neq 0$, le (19), (20) e (21) sono condizioni necessarie e sufficienti; ma possono semplificarsi. La 1ª delle (20) si scinde in due

$$a_2 = 0 \qquad \text{o} \qquad a_3^2 = a_1^2a_4.$$

Se $a_2 = 0$ la (21) dà $-a_1a_3^5 + a_3^4a_4 = 0$ ossia $a_4 = a_1a_3$, per cui la 2ª delle (20) diventa $a_3^4 = a_1^6a_3^2$ ossia $a_3 = \pm a_1^3$, e però

$$f(x) = x^4 + a_1x^3 \pm a_1^3x \pm a_1^4 = (x^3 \pm a_1^3)(x + a_1). \tag{22}$$

Se $a_3^2 = a_1^2a_4$, la 2ª delle (20) resta soddisfatta e la (21) ponendovi $a_4 = \frac{a_3^2}{a_1^2}$ diventa

$$-a_1^4a_3 + a_1^2a_2a_3 + a_3^2a_1 + a_2^3a_1 - 2a_2^2a_3 = 0.$$

Queste condizioni illecitamente applicate quando $a_2 = 0$ conducono alla (22).

Infine, se $a_3 = 0$, pel teorema del § 4 si ha che

$$f(x) = x^4 + a_1x^3 \qquad \text{o} \qquad f(x) = (x^2 + \tfrac{1}{2}a_2)^2 \qquad \text{o} \qquad f(x) = x^4 + a_4.$$

Raccogliendo si ha il teorema: *Affinchè l'equazione generale* (18) *del* 4° *grado abbia le radici in progressione geometrica è necessario e sufficiente che sia*

$$f(x) = x^4 + a_1 x^3, \quad \text{o} \quad f(x) = (x^2 + \tfrac{1}{2} a_2)^2 \quad \text{o} \quad f(x) = x^4 + a_4$$

o che sia

$$\left.\begin{array}{c} a_3 \neq 0, \qquad a_4 a_1^2 = a_3^2 \\ -a_1^4 a_3 + a_1^2 a_2 a_3 + a_3^2 a_1 + a_2^3 a_1 - 2a_2^2 a_3 = 0 \end{array}\right\}.$$

7. Sia

$$f(x) = x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 = 0. \tag{23}$$

Se $a_4 \neq 0$, il teorema del § 3 impone anzitutto che sia

$$\begin{array}{ccc} a_1 \neq 0 & \text{e} & a_5 \neq 0 \\ a_2 a_4^2 = a_1^2 a_3 a_5 & \text{e} & a_4^5 = a_1^5 a_5^3 \end{array} \tag{24}$$

ma le prime due sono una conseguenza della 4ª e però inutili. Supposto verificate le (24), eseguendo sulla (23) la trasformazione $x = \alpha y$, ove $\alpha = \sqrt{\frac{a_1 a_5}{a_4}}$, l'equazione trasformata

$$\varphi(y) = \alpha^5 x^5 + a_1 \alpha^4 y^4 + a_2 \alpha^3 y^3 + a_3 \alpha^2 y^2 + a_4 \alpha y + a_5 = 0$$

sarà autoreciproca e ammetterà per radice 1, se conveniamo di prendere per α quel valore di $\sqrt{\frac{a_1 a_5}{a_4}}$ che dev'essere radice della (23) e però si potrà scrivere

$$\varphi(y) = a_5 (y^5 - 1) + \alpha a_4 (y^4 - y) + \alpha^2 a_3 (y^3 - y^2) = 0,$$

che divisa per $y - 1$ diventa

$$a_5 (y^4 + 1) + (a_5 + \alpha a_4)(y^3 + y) + (a_5 + \alpha a_4 + \alpha^2 a_3) y^2 = 0;$$

questa, divisa per y^2, si riduce a

$$\psi(z) = a_5 z^2 + (a_5 + \alpha a_4) z + (\alpha^2 a_3 + \alpha a_4 - a_5) = 0,$$

ove si è posto $y + \frac{1}{y} = z$.

Dette z_1 e z_2 le sue radici, dev'essere $z_2 = z_1^2 - 2$ ossia $z_1 + z_2 = z_1^2 + z_1 - 2$; ma $z_1 + z_2 = -\frac{a_5 + \alpha a_4}{a_5}$, dunque

$$a_5 z_1^2 + a_5 z_1 + (\alpha a_4 - a_5) = 0.$$

Sottraendo da $\psi(z_1) = 0$, risulta $\alpha a_4 z_1 + \alpha^2 a_3 = 0$; ricavando il valore di z_1, e sostituendolo nell'equazione precedente, si ha facilmente

$$(a_1 a_3^2 a_5 - a_4^3) a_5 = (a_3 a_5 - a_4^2) a_4^2 \alpha;$$

quadrando e tenendo presente che $\alpha^2 = \frac{a_1 a_5}{a_4}$, si ha infine

$$(a_1 a_3^2 a_5 - a_4^3)^2 a_5 = (a_3 a_4 - a_4^2)^2 a_4^3 a_1.$$

Se poi $a_4 = 0$, il teorema del § 4 dà o $f(x) = x^5$, o $f(x) = x^5 + a_1 x^4$ o $f(x) = x^5 + a_5$.

Dunque: *affinchè l'equazione generale* (23) *del* 5° *grado abbia le radici in progressione geometrica è necessario e sufficiente che sia*

$$f(x) = x^5 + a_1 x^4 \qquad \text{o} \qquad f(x) = x^5 + a_5$$

oppure

$$\left.\begin{array}{l} a_4 \neq 0, \ a_2 a_4^2 = a_1^2 a_3 a_5, \ a_4^5 = a_1^5 a_5^3 \\ (a^1 a_3^2 a_5 - a_4^3)^2 a_5 = (a_3 a_5 - a_4^2)^3 a_4^3 a_1 \end{array}\right\} .$$

8. Ora passiamo a risolvere l'equazione (1) nell'ipotesi che essa abbia le radici che formino una progressione geometrica, cioè che sieno verificate le condizioni enunciate nel teorema del § 3 o del § 4. Basterà calcolare r e ρ.

Supponiamo anzitutto $a_{n-1} \neq 0$, allora per la (7) sarà

$$r \neq 0, \qquad \rho \neq 0, \qquad \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho} \neq 0$$

e quindi anche $a_1 \neq 0$ per la (5).

Essendo $a_{n-1} \neq 0$, regge la (9), quindi la (5), moltiplicata per r, diventa

$$-a_1 r = \frac{1}{1-\rho}\left(r^2 - \rho \frac{a_1 a_n}{a_{n-1}}\right)$$

ossia

$$a_{n-1} r^2 + a_1 a_{n-1} (1 - \rho) r - a_1 a_n \rho = 0. \tag{25}$$

La (8), per la (5) può scriversi

$$2a_2 - a_1^2 = a_1 r \frac{1 + \rho^n}{1 + \rho};$$

questa moltiplicata per r diventa, per la (9),

$$(2a_2 - a_1^2) r = \frac{a_1}{1+\rho}\left(r^2 + \rho \frac{a_1 a_n}{a_{n-1}}\right)$$

ossia

$$a_1 a_{n-1} r^2 - a_{n-1} (2a_2 - a_1^2)(1 + \rho) r + a_1^2 a_n \rho = 0. \tag{26}$$

Combinando per sottrazione la (26) e la (25) moltiplicata per a_1, si ha

$$a_{n-1} r \,[a_2 + (a_2 - a_1^2)\rho] - a_1^2 a_n \rho = 0, \tag{27}$$

invece, cambiandole per addizione e dividendo il risultato per $a_{n-1} r$ si ha

$$a_1 r - a_2 \rho + a_1^2 - a_2 = 0. \tag{28}$$

Ricavando r da questa equazione e sostituendolo nella (27) si ha un'equazione di 2° grado in ρ; quindi il

Teorema. — *Se l'equazione* (1) *del grado* n *ha le radici che formano una progressione geometrica ed* $a_2 \neq 0$ *e* $a_2 - a_1^2 \neq 0$, *la ragione* ρ *della progressione è una qualunque delle radici dell'equazione.*

$$\rho^2 + \left[2 + \frac{a_1^3 (a_{n-1} a_1 - a_n)}{a_2 (a_2 - a_1^2) a_{n-1}}\right] \rho + 1 = 0$$

ed il primo termine r *è*

$$r=\frac{a_2}{a_1}(1-\rho)-a_1.\ ^{(1)}$$

9. Esaminiamo i due casi esclusi, cioè $a_2=0$ o $a_2-a_1^2=0$, ma supponendo sempre $a_{n-1}\neq 0$.

Se $a_2=0$, segue dalla (8)' che dev'essere necessariamente

$$1-\rho^{n-1}=0$$

perchè negli altri casi in cui si annulla a_2 si annulla anche a_{n-1}.

Allora ρ sarà una radice $(n-1)^{ma}$ dell'unità, quindi detto s l'esponente (divisore di $n-1$) cui essa appartiene, sarà evidentemente

$$f(x)=(x^s-r^s)^{\frac{n-1}{s}}(x-r)=x^n-rx^{n-1}-\frac{n-1}{s}r^s x^{n-s}+\ldots;$$

e paragonando con la (1) ne segue che $r=-a_1$ e che dev'essere $s>2$, (dovendo essere $a_2=0$) e che s è l'indice del primo coefficiente che segue a_2 e che non è nullo. Si ha così il

Teorema. — *Se l'equazione* (1) *del grado* n *ha le radici che formano una progressione geometrica ed è* $a_{n-1}\neq 0$ *e* $a_2=0$, *il primo termine* r *della progressione è il coefficiente* a_1 *del* 2° *termine cambiato di segno e la ragione* ρ *è una qualunque radice primitiva dell'unità appartenente all'indice* s *del primo coefficiente che segue* a_1 *e che non è nullo.*

Supponiamo ora $a_{n-1}\neq 0$ e $a_2-a_1^2=0$. Segue subito che dev'essere $1-\rho^{n+1}=0$, ossia che ρ^n è una radice $(n+1)^{ma}$ dell'unità, perchè dalle (5) e (8)' si ha facilmente

$$a_1^2-a_2=r^2\frac{(1-\rho^n)(1-\rho^{n+1})}{(1-\rho)^2(1+\rho)}.$$

Detto s l'esponente (divisore di $n+1$) cui ρ appartiene, è facile convincersi che sarà

$$f(x)=(x^s-r^s)^{\frac{n+1}{s}}:(x-x_n) \qquad \text{ove } x_n=r\rho^n$$

ossia

$$f(x)=x^n+x_nx^{n-1}+x_n^2x^{n-2}+\ldots+x_n^{s-1}x^{n+1-s}+\left(x_n^s-\frac{n+1}{s}r^s\right)x^{n+s}+\ldots$$

Paragonando con la (1), segue che $x_n=a_1$ e che effettivamente $a_2-a_1^2=0$ purchè non sia $s=2$, chè in tal caso invece

$$a_2-a_1^2=-\frac{n+1}{2}r^2\neq 0.$$

Osservando che $a_2=a_1^2$, $a_3=a_1^3,\ldots,a_{s-1}=a_1^s$, $a_s=a_1^s-\frac{n+1}{s}r^s$, possiamo enunciare il

Teorema. — *Se l'equazione* (1) *del grado* n *ha le radici che formano una progressione geometrica ed è* $a_{n-1}\neq 0$ *e* $a_2-a_1^2=0$, *l'ultimo termine* x_n *è eguale al coefficiente* a_1 *del* 2° *termine e la ragione* ρ *è una*

---

(1) Nell'enunciato ho tralasciato la condizione $a_{n-1}\neq 0$, perchè essa resta assorbita dall'altra $a_2\neq 0$, come risulta dal paragone delle (7) e (8)'.

qualunque radice primitiva dell'unità appartenente all'indice s *del primo coefficiente* a_s *che non è potenza* s^{ma} *di* a_1.

10. Infine dal teorema del § 4 segue subito il

TEOREMA. — *Se l'equazione* (1) *del grado* n *ha le radici che formano una progressione geometrica ed è* $a_{n-1} = 0$: 1° *o* $f(x) = x^n$ *e le sue radici son tutte nulle*; 2° *o* $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1}$, *e le sue radici sono*

$$x_1 = -a_1, \qquad x_2 = \ldots = x_n = 0;$$

3° *o* $f(x) = \left(x^s + \frac{s}{n} a_s\right)^{\frac{n}{s}}$ *con* s *divisore di* n *e maggiore di* 1, *e le sue radici sono le radici* s^{me} *di* $-\frac{s}{n} a_s$, *ove* a_s *è il primo coefficiente di* $f(x)$ *che non è nullo, ripetute* $\frac{n}{s}$ *volte.*

Dott. GUSTAVO SANNIA
(*Torino*).

SULLA DEFINIZIONE DI AREA DI UNA SUPERFICIE CURVA

1. Nella prefazione del suo Corso d'Analisi *Jordan* cita come uno dei punti del Calcolo che ancora sono oscuri la definizione di area di una superficie curva.

Mentre per la lunghezza di un arco di curva piana o storta, si è data già una soddisfacente definizione, dalla quale, e questo è un risultato importante, si è potuto risalire a stabilire a quali condizioni devono soddisfare le funzioni rappresentative di quelle curve acciò esse siano rettificabili, delle definizioni di area di una superficie curva, parecchie sono state riconosciute errate, altre non sono, dal punto di vista logico, immuni da qualche difetto, da nessuna poi delle proposte si è potuto ricavare l'analoga determinazione delle condizioni necessarie e sufficienti cui debbono soddisfare le funzioni che analiticamente rappresentano le superfici, acciò queste ammettano area determinata, se esplicitamente nella definizione non è indicato che essa vale solo per classi particolari di superfici.

È noto infatti che, definendo la lunghezza di un arco di curva come il limite cui tende la lunghezza di una poligonale inscritta, al decrescere indefinito ed arbitrario dei lati, e chiamando rettificabile una curva di cui l'arco ha una lunghezza determinata, funzione continua di un parametro *t*, *Jordan* (1) ha dedotto che le funzioni di *t* con cui sono date le coordinate di un punto corrente della curva, debbono essere continue ed a variazione limitata, acciò la curva stessa sia rettificabile. È da osservare, a questo proposito, che le

(1) JORDAN, *Cours d'Analyse*. Vol. I, pag. 105.

condizioni trovate da *Jordan* sono, in sostanza, a parte la denominazione, quelle già date da *Scheeffer*. [1]

Ma se si rappresenta una superficie mediante tre equazioni

$$x = \varphi_1 (u, v), \qquad y = \varphi_2 (u, v), \qquad z = \varphi_3 (u, v),$$

ove u e v sono due parametri variabili in un certo campo — metodo il più generale di rappresentazione — e si definisce l'area in uno dei tanti modi proposti, non ancora, come dicevamo, si sono trovate le condizioni cui devono soddisfare le φ_1, φ_2, φ_3, acciò la superficie abbia area determinata.

Non ho creduto frattanto del tutto inutile il passare in rassegna parecchie delle definizioni proposte per l'area delle superfici curve, allo scopo di seguire l'evoluzione dei concetti che hanno ispirato le definizioni stesse.

2. I Geometri greci, limitandosi allo studio dell'area di alcune superfici del 2° ordine, il cilindro, il cono, la sfera, non diedero una definizione generale di area. *Archimede* [2] enunciò il seguente postulato relativo alle superfici concave: « Se di due superfici concave rispetto ad uno stesso piano e terminate entrambe su di esso, l'una comprende l'altra la compresa ha area minore della comprendente ». Ne discende che l'area di una superficie curva concava è maggiore di quella di qualunque superficie poliedrica concava inscritta e minore di quella di qualunque superficie poliedrica concava circoscritta. Per le superfici accennate *Archimede* dimostrò la coincidenza del limite superiore delle aree delle inscritte col limite inferiore delle aree delle circoscritte, ed il limite comune assunse come area delle superfici.

Si potrebbe, in generale, dimostrare che le aree delle superfici poliedriche concave inscritte e quelle delle superfici poliedriche concave circoscritte ad una superficie curva pure concava, all'impiccolire indefinito delle faccie, costituiscono due classi di numeri contigue: allora il numero da esse definito si può assumere come area della superficie curva.

Ma questo modo di definire l'area non vale più manifestamente per le superfici concavo-convesse, perchè per esse non si può ammettere il postulato enunciato da Archimede.

3. Nei trattati di Calcolo che precedono l'ultima metà del secolo scorso, non si premette mai alle considerazioni che riflettono l'area di una superficie curva alcuna definizione. Ciò sarebbe necessario dal punto di vista logico; poichè infatti non si può pensare a dar metodi per calcolare l'area di una superficie, se non si precisa, in precedenza, che cosa s'intenda per l'area stessa.

Non avendo premessa questa definizione, il dire, o peggio, il voler dimostrare, come alcuni annalisti facevano, che una porzione infinitesima ω di superficie ed una porzione ω' di piano tangente in un punto di ω, proiezione di ω stessa secondo una direzione qualunque, differiscono per infinitesimi di ordine superiore, è manifestamente inesatto, perchè non si possono fra loro confrontare superficie curve e piane, neanche nelle parti infinitesime.

Cousin, [3] chiamato elemento di una superficie $z = f(x, y)$ il quadrilatero curvilineo staccato nella superficie stessa dal prisma che ha per base un rettangolo coi lati paralleli agli assi x e y e di dimensioni dx, dy, dice che,

(1) SCHEEFFER, *Acta Mathematica*. V.

(2) ARCHIMEDE, *Della sfera e del cilindro*. Libro I.

(3) COUSIN, *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral*. Paris, 1796, vol. I; § 353.

essendo il coseno dell'angolo che la normale alla superficie fa coll'asse z misurato da

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2},$$

è facile vedere che il rapporto dell'elemento di superficie al rettangolo $dxdy$ è

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2},$$

e perciò l'elemento stesso è uguale a

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}dxdy$$

e l'area della superficie a

$$\int\int\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}dxdy.$$

Lagrange [1] comincia col dire che rappresentando con $F(x, y)$ l'area della superficie $z=f(x, y)$,

$$F(x+h,\ y+k)-F(x+h,\ y)-F(x,\ y+k)+F(x,\ y)$$

misura l'area della porzione di superficie che intercetta il prisma retto avente per base sul piano $z=0$ il rettangolo i cui vertici sono i punti

$$(x,\ y),\quad (x+h,\ y),\quad (x,\ y+k),\quad (x+h,\ y+k). \qquad (1)$$

Un significato preciso di ciò che intende *Lagrange* ponendo l'area di una superficie curva uguale ad una funzione di x e y, $F(x, y)$, si ha mediante quest'osservazione. Data una superficie $z=f(x, y)$, riferita ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, essendo f funzione ad un valore, sia C la proiezione della superficie sul piano $z=0$. Ad ogni punto (x, y) di questa si può coordinare, in virtù di una qualunque convenzione, una delle quattro parti di C in cui due piani condotti pel punto parallelamente ai piani xz, yz la dividono, e quindi una determinata parte di superficie, quella che ha per proiezione la parte detta di C. Allora, *data una qualunque definizione di area* si può indicare con $F(x, y)$ l'area della parte di superficie coordinata al punto (x, y) ed *in questo senso,* può dirsi l'area della superficie funzione di x e y.

Lagrange dice senz'altro di rappresentare con $F(x, y)$ la misura della superficie: credo tuttavia che il significato che a ciò si deve annettere non possa essere che quello ora riferito.

È ora evidente che

$$\Omega(x, y, h, k)=F(x+h,\ y+k)-F(x+h,\ y)-F(x, y+k)+F(x, y)$$

misura l'area del quadrilatero curvilineo ω tagliato sulla superficie dal prisma retto avente per base il rettangolo i cui vertici sono i punti (1).

Lo stesso prisma stacca sui quattro piani tangenti alla superficie nei punti che sono proiettati nei punti (1), quattro quadrilateri le cui aree sono ordinatamente

$$hk\,\varphi(x,\ y),\quad hk\varphi(x+h,\ y),\quad hk\varphi(x,\ y+k),\quad hk\varphi(x+h,\ y+k) \qquad (2)$$

avendo posto

$$\varphi(x,\ y)=\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

---

[1] LAGRANGE. *Théorie des fonctions analytiques.* Paris, 1813, § 79 e sgg.

Ora — dice *Lagrange* — come la lunghezza di un arco di curva tutto concavo o convesso rispetto all'asse x è compresa fra le lunghezze dei due segmenti di tangenti condotte per gli estremi dell'arco ed intercetti dalle ordinate agli estremi stessi, così l'area $\Omega(x, y, h, k)$ è compresa, per quanto piccoli si facciano h e k, fra la massima e la minima delle aree dei quattro quadrilateri (2).

Ora può scriversi

$$hk\varphi(x+h, y) = hk\varphi(x, y) + h^2k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{\substack{x+\theta h \\ y}}$$

$$hk\varphi(x, y+k) = hk\varphi(x, y) + hk^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{\substack{x \\ y+\theta' k}}$$

$$hk\varphi(x+h, y+k) = hk\varphi(x, y) + h^2k\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{\substack{x+\theta'' h \\ y+\theta'' k}} + hk^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{\substack{x+\theta'' h \\ y+\theta'' k}}$$

$$\Omega(x, y, h, k) = hk\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right)_{\substack{x \\ y}} + \frac{h^3}{3!}\left\{\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right)_{\substack{x+\lambda h \\ y+\lambda k}} - \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right)_{\substack{x+\lambda' h \\ y}}\right\} +$$

$$+ \frac{k^3}{3!}\left\{\left(\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}\right)_{\substack{x+\lambda h \\ y+\lambda k}} - \left(\frac{\partial^3 F}{\partial y^3}\right)_{\substack{x \\ y+\lambda'' k}}\right\} + \frac{h^2k}{2}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial y\,\partial x^2}\right)_{\substack{x+\lambda h \\ y+\lambda k}} + \frac{hk^2}{2}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial y^2\partial x}\right)_{\substack{x+\lambda h \\ y+\lambda k}}$$

con λ, λ', λ'', θ, θ', θ'' compresi fra 0 ed 1.

E poichè la differenza fra due qualsiansi delle quattro quantità (2) è infinitesima del 3° ordine, considerati h e k come infinitesimi unità, la differenza fra $\Omega(x, y, h, k)$ ed una qualunque delle stesse (2), dovrà essere rispetto ad h e k infinitesima pure del 3° ordine; perciò dovrà essere nullo il termine, infinitesimo del 2° ordine, che in tutte e quattro le differenze compare

$$hk\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} - \varphi(x, y)\right),$$

ossia dovrà essere

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} = \varphi(x, y),$$

da cui

$$F(x, y) = \int\int\varphi(x, y)\,dxdy,$$

la doppia integrazione estesa a quella parte di C che è coordinata al punto (x, y).

Lacroix [1] procede in altro modo. Egli dice, conservando i simboli già introdotti, che potendosi scrivere

$$\Omega(x, y, h, k) = hk\left\{\frac{1}{h}\left(\frac{F(x+h, y+k) - F(x+h, y)}{k} - \frac{F(x, y+k) - F(x, y)}{k}\right)\right\}$$

il rapporto fra l'area del pezzo di superficie staccato dal noto prisma e la sua proiezione sul piano $z = 0$ di area hk, tende, al tendere a zero di h e k a $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$.

Si consideri allora il quadrilatero ω' che lo stesso prisma stacca dal piano tangente nel vertice del quadrilatero curvilineo ω di coordinate $x, y, f(x, y)$: la sua area è

$$hk\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

---

[1] LACROIX, *Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral*. Paris, 1837.

Poichè ciascuna retta pel vertice di ω, che è punto di contatto e giacente sul piano ivi tangente alla superficie, è tangente ad una curva tracciata sulla superficie, e poichè il segmento di detta tangente compreso in ω' ha coll'arco di curva, a cui è tangente, compreso in ω, un rapporto che all'impiccolire indefinito di h e k tende ad 1, ne consegue, dice *Lacroix*, che altrettanto può dirsi del rapporto $\frac{\omega}{\omega'}$.

Deriva allora

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

e quindi

$$F(x, y) = \int\int\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}dxdy$$

la doppia integrazione estesa come dianzi.

L'asserzione di *Lagrange* che l'area $\Omega(x, y, h, k)$ sia compresa fra la massima e la minima delle aree dei quadrilateri (2) è manifestamente inesatta: basterebbe, a provarlo, osservare che, se essa fosse giusta, il quadrilatero curvilineo della sfera $x^2+y^2+z^2=r^2$ che si proietta ortogonalmente sul piano xy nel quadrilatero di vertici (h, h), $(h, -h)$, $(-h, h)$, $(-h, -h)$ avrebbe un'area uguale a quella del quadrilatero piano tangente in un vertice qualunque del quadrilatero curvilineo, e che viene proiettato sul quadrato stesso.

Del pari, non è una dimostrazione l'osservazione che *Lacroix* fa per stabilire che il quadrilatero curvilineo ω e la sua proiezione ω' sul piano tangente in un vertice di quello, hanno un rapporto che tende ad 1.

Ma se anche si ammette che l'elemento infinitesimo di superficie curva abbia colla sua proiezione sul piano tangente in un punto dell'elemento stesso un rapporto tendente ad 1, mentre resta giustificato che il rapporto fra l'elemento stesso e la sua proiezione sul piano $z=0$ sia

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

tutte le volte che si tratti di una superficie $z=f(x, y)$ che ha un piano tangente determinato in tutti i punti (o generalmente), non si giustifica per niente che il rapporto in parola debba essere $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$.

Infatti, per venire a questa conclusione, è necessario ammettere la derivabilità della $F(x, y)$: ora, che la funzione F stessa, debba essere, qualunque sia la definizione che di area si voglia dare, una funzione continua, è naturale ammettere; che essa sia derivabile, come la considerano *Lagrange* e *Lacroix* non c'è ragione alcuna di presupporlo.

Fallisce con ciò il tentativo di definire *a posteriori* la $F(x, y)$, cioè l'area della superficie curva; ma non va dimenticato che al tempo di quei Matematici si credeva erroneamente che ogni funzione continua fosse derivabile.

4. In qualche trattato di Calcolo posteriore si comincia a dare una definizione di area, definizione analoga a quella da noi richiamata in principio per la lunghezza di un arco di curva.

Data una porzione di superficie curva, limitata da un contorno C, *Serret* [1] definisce come area di questa superficie il limite cui tende l'area di una superfice poliedrica inscritta, formata di faccie triangolari e limitata da un

[1] SERRET, *Cours de Calcul différentiel et intégral.*

contorno poligonale che abbia per limite il contorno C, all'impiccolire indefinito delle faccie.

Serret ed i molti altri che ne accettarono la definizione, [1] basandosi sopra l'erronea asserzione che il piano per tre punti della superficie tenda, all'avvicinarsi indefinito di 2 punti al terzo, ed in qualunque modo questi punti si avvicinino, al piano tangente alla superficie in quest'ultimo, credevano poter dimostrare che il limite della superficie poliedrica era indipendente dalla legge secondo cui la superficie poliedrica è formata e secondo cui tendono a zero le sue faccie.

Senonchè *Schwarz* [2] e *Peano* [3] dimostrarono con un esempio, che qui riprodurremo, come un tal limite dipenda invece dal modo con cui si fanno tendere a zero le faccie della superficie poliedrica.

Si consideri un cilindro circolare riferito ad un sistema cartesiano ortogonale di assi, in guisa che l'asse del cilindro coincida coll'asse z. Se r è il raggio del cilindro, le sue equazioni parametriche sono

$$x = r\cos u \qquad y = r \operatorname{sen} u \qquad z = v$$

ed u varierà da 0 a 2π; v da 0 ad h, considerando la porzione di cilindro compreso fra i piani $z = 0$ e $z = h$.

Imaginiamo i $2n+1$ circoli sezioni del cilindro con altrettanti piani $z = \frac{hs}{2n}$ $(s = 0, 1, \ldots, 2n)$ e sopra i circoli il cui numero d'ordine è pari, cioè sopra quelli che corrispondono ai piani $z = \frac{sh}{n}$ $(s = 0, 1, \ldots, n)$ si segnino gli m punti che corrispondono ai valori di $u = \frac{2r\pi}{m}$ $(r = 0, 1, \ldots, m-1)$ e sopra gli altri circoli si segninò gli m punti che corrispondono ai valori di $u = \frac{(2r+1)\pi}{m}$ $(r = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$.

Ogni punto di ciascun circolo si congiunga colla coppia di punti posti sul circolo seguente e ad esso punto più prossimi e si uniscano ancora insieme questi due punti.

Si viene in questo modo ad inscrivere nel cilindro una superficie poliedrica di $4mn$ faccie triangolari isosceli uguali, ognuna delle quali ha due vertici su uno stesso cerchio, ed ha l'area

$$r \operatorname{sen}\frac{\pi}{m}\sqrt{4r^2 \operatorname{sen}^4\frac{\pi}{2m} + \frac{h^2}{4n^2}}.$$

Epperò l'area totale della superficie poliedrica sarà

$$\beta(m,\ n) = 2mr \operatorname{sen}\frac{\pi}{m}\sqrt{r^2n^2\left(2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2m}\right)^4 + h^2}.$$

L'impiccolimento indefinito delle faccie si ottiene facendo crescere indefinitamente m ed n; ora se il rapporto $\frac{n}{m}$ si mantiene uguale ad un numero k, cioè si ha $n = mk$ si ha manifestamente

$$\lim_{m=\infty} \beta(m,\ n) = 2\pi rh$$

che è la *nota* area del cilindro.

---

[1] Per citarne qualcuno: Dini e Duhamel.

[2] SCHWARZ, *Sur une définition erronée de l'aire d'une surface courbe.* Gesammelte Abhandlungen. Berlin, 1891.

[3] PEANO, *Lezioni di Calcolo dell'anno 1882*, litografate. Vedi ancora il *Formulaire* dello stesso.

Se invece m ed n si fanno crescere in guisa che sia $\frac{n}{m^2}=k$, è

$$\lim_{m=\infty} \beta(m, n) = 2\pi r \sqrt{r^2 k^2 \pi^4 + h^2},$$

che può assumere qualunque valore al variare di k.

Infine se m ed n crescono in guisa che $\frac{n}{m^\lambda}=k$, con $\lambda > 2$, si ha evidentemente

$$\lim_{m=\infty} \beta(m, n) = \infty.$$

È facile poi vedere quale sia nei vari casi la posizione limite del piano della faccia generica, al suo impiccolire indefinito.

Il coseno dell'angolo ξ formato dalla normale ad una faccia colla normale al cilindro in un vertice della faccia stessa è

$$\cos \xi = \frac{h \cos \frac{\pi}{m}}{\sqrt{r^2 n^2 \left(2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2m}\right)^4 + h^2}}.$$

Ora se $n = km$

$$\lim_{m=\infty} \cos \xi = 1 \qquad \text{onde} \qquad \lim \xi = 0;$$

se $n = km^2$

$$\lim_{m=\infty} \cos \xi = \frac{h}{\sqrt{r^2 k^2 \pi^4 + h^2}} < 1,$$

onde

$$\lim \xi \neq 0 \text{ e dipendente da } k;$$

e se infine $n = km^\lambda$ con $\lambda > 2$

$$\lim_{m=\infty} \cos \xi = 0 \qquad \text{onde} \qquad \lim \xi = \frac{\pi}{2}.$$

Con ciò si vede che solo nel caso che l'impiccolimento delle faccie avvenga in modo che sia $n = km$ il piano delle faccie stesse tende al piano tangente al cilindro; negli altri casi tende a posizioni diverse, anzi nell'ultimo caso alla posizione di un piano per la normale alla superficie.

Queste osservazioni di *Schwarz* e di *Peano* determinarono due indirizzi diversi nel porre la definizione di area: o abbandonare, senz'altro, le superficie poliedriche inscritte, oppure conservarle, aggiungendo qualche condizione restrittiva all'impiccolire delle faccie, in guisa da assicurare che il limite delle superficie poliedriche, se esiste, è indipendente, tranne che per le poste condizioni, dalla legge di formazione delle superficie poliedriche stesse.

Il voler mantenere la considerazione delle superficie inscritte era suggerito dall'analogia colla definizione di lunghezza di un arco di curva, analogia che doveva, però, sacrificare uno dei caratteri più desiderabili in una definizione: la non introduzione di elementi estranei all'ente da definirsi, quali, in sostanza, vengono ad essere le restrizioni che si debbono porre.

5. Prima di passare in rassegna le nuove definizioni date in seguito alle considerazioni di *Peano* e di *Schwarz*, facciamo ancora qualche osservazione sopra definizioni precedenti.

Duhamel (1) dà una definizione analoga a quella del *Serret*, e crede di

(1) DUHAMEL, *Eléments de Calcul infinitésimal.* Paris. 1853, vol. I.

poter dimostrare che il limite dell'area di una qualunque superficie poliedrica inscritta è indipendente dalla legge di formazione delle faccie e della loro tendenza a zero, supponendo che le faccie tendano a divenire infinitamente piccole in tutti i sensi. Egli poi dice che nella ricerca di questo limite si può sostituire alla superficie inscritta una superficie poliedrica circoscritta ottenuta nel modo seguente. Divisa la superficie in quadrilateri curvilinei ω_s mediante due serie di piani paralleli ad una direzione, secondo la quale ogni retta incontra la superficie in un sol punto, si mandi per un punto qualunque di ω_s il piano tangente e su di esso si consideri quella parte γ_s intercetta dai 4 punti che deteterminano ω_s: l'insieme dei quadrilateri piani γ_s è la superficie circoscritta (discontinua), il limite della quale, all'impiccolire indefinito dei γ_s, coincide — dice *Duhamel* — con quello dell'area di una qualunque superficie poliedrica inscritta.

È questa asserzione che è inesatta, giacchè mentre si può provare che il limite dell'area della superficie circoscritta, se esiste, è indipendente dalla legge di decrescenza delle faccie, altrettanto, come già sappiamo, non può dirsi dell'area della superficie inscritta. È da notarsi però che, quantunque errata, quest'osservazione contiene l'essenza della definizione data più tardi da *Hermite*.

Lo *Sturm* (1) chiama area di una superficie curva il limite dell'area di una superficie poliedrica composta di faccie piane che, impiccolendo tutte indefinitamente, tendano a divenire tangenti alla superficie considerata, supponendo d'altra parte, che il contorno della superficie poliedrica tenda al contorno della superficie curva.

La definizione di *Sturm* — il quale forse aveva intravvisto che il piano per tre punti di una superficie non tende necessariamente al piano tangente, all'avvicinarsi indefinito dei tre punti — non presenta manifestamente il difetto delle precedenti. Soddisfacendo la superficie poliedrica alla posta condizione, il limite della sua area è indipendente da ogni legge di impiccolimento delle faccie che non contraddica alla stessa condizione. Tuttavia se non si dànno esplicitamente dei criteri per riconoscere quando è che una superficie poliedrica inscritta è tale che le sue faccie, impiccolendo, tendono a divenire tangenti, la definizione non si presta alla determinazione effettiva dell'area.

6. *Harnack*, (2) nella sua traduzione del Calcolo del *Serret*, impone la condizione che gli angoli di ciascuna faccia triangolare della superficie poliedrica non tendano nè a zero nè a π. Con ciò si ottiene che il piano di ciascuna faccia tende al piano tangente; ma *Peano* (3) osserva che questa definizione, cioè la solita di *Serret* coll'aggiunta della detta condizione, non risulta soddisfacente, in quantochè, se si suppone che una superficie sia tale che da ciascuna retta parallela ad una direzione fissa venga incontrata in un sol punto, non risulta come conseguenza che ogni superficie poliedrica inscritta non possa essere incontrata da una parallela a quella direzione in più d'un punto. Si osservi poi, che il calcolo dell'area di una superficie che da ciascuna parallela all'asse z, è incontrata in un sol punto, si fonda sul fatto che le faccie

---

(1) STURM, *Cours d'Analyse de l'École polythecnique.* Paris, 1857, vol. I.
(2) HARNACK, *Lehrbuch der Differential-und Integralrechnung.* Vol. II, 1885.
(3) PEANO, *Sulla definizione dell'area di una superficie.* " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei - 1890 ".

triangolari della superficie poliedrica vengono proiettate, parallelamente all'asse z, in tanti triangoli che compongono, senza sovrapporsi, un poligono avente per limite la porzione di piano limitata dalla proiezione del contorno della superficie.

È allora manifesto che essendo infirmata l'esattezza di questa asserzione, la definizione dianzi accennata non può essere accettabile.

Una definizione che conserva essa pure la considerazione delle superficie poliedriche inscritte è quella proposta dal *Maggi*, [1] definizione che, com'è in essa esplicitamente detto, non vale che per una classe determinata di superficie. Ricercando una condizione sufficiente perchè collo svanire del raggio di un cerchio capace di contenere le singole faccie di una superficie poliedrica inscritta in una superficie curva, svanisca uniformemente l'angolo formato dalla perpendicolare al piano colla normale alla superficie in un punto qualunque del pezzo di superficie sottesa alla faccia, *Maggi* mostra che se la superficie è dotata in ogni punto di normale variabile da punto a punto con continuità, è possibile iscrivere sempre una successione infinita di superfici poliedriche, corrispondenti a due successioni correlative di angoli e di cerchi, ambedue infinitamente decrescenti; in tal modo che, purchè le faccie di una superficie poliedrica capiscano in un cerchio l'angolo formato dalla perpendicolare al piano delle singole faccie colla normale alla superficie in un punto qualsivoglia del seguente sotteso, riesca minore dell'angolo relativo.

Da ciò risulta giustificata la seguente definizione: Area di una superficie curva dotata in ogni punto di normale, variabile da punto a punto con continuità, è il limite dell'area di una superficie poliedrica inscritta, collo svanire del raggio di un cerchio capace di contenere le singole faccie, sotto la condizione che, insieme con questo raggio svanisca uniformemente l'angolo formato dalla perpendicolare al piano di ogni faccia colla normale alla superficie in un punto qualsivoglia del segmento sotteso.

Maggi trova una condizione cui devono soddisfare le faccie, condizione che equivale ad imporre che esse siano infinitesime dello stesso ordine col quadrato del raggio del cerchio capace di contenerle, e quindi anche col loro lato maggiore. Ma perchè ciò sia, bisogna che i lati siano tutti infinitesimi dello stesso ordine e quindi che gli angoli non tendano nè a 0 nè a π, che è la condizione imposta da *Harnack*.

7. Ed ora veniamo alle definizioni che non partono dalla considerazione di superficie inscritte, cominciando da quella di *Hermite*. [2]

Sia data una superficie $z = f(x,y)$ e di essa se ne consideri una porzione Γ tale che ogni ordinata sia incontrata in un sol punto, ed abbia in ogni punto un piano tangente non perpendicolare al piano $z = 0$. Sia C la proiezione di Γ nel piano xy, si divida C in parti arbitrarie ω_s, e, prendendo le linee che le determinano per direttrici, si mandino delle superfici cilindriche colle generatrici parallele all'asse z. La superficie verrà divisa in parti σ_s: si mandi poi per un punto arbitrario di ciascuna σ_s il piano tangente e se ne consideri la porzione τ_s che è limitata dalla superficie cilindrica che determina la σ_s stessa.

Si è in tal modo circoscritta alla porzione Γ di superficie considerata una superficie T discontinua composta di pezzi piani τ_s.

---

[1] MAGGI, *Sull'area delle superficie curve.* " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei - 1896 ".

[2] HERMITE, *Cours professé à la Faculté de Sciences.* Paris, 1887.

Il limite, se esiste, dell'area di T all'impiccolire indefinito delle parti ω, (in guisa da tendere a zero la massima corda) è l'area del pezzo Γ di superficie.

La definizione di *Hermite* fu adottata da tutti i trattatisti contemporanei: (1) tuttavia *Maggi* e *Peano* osservano che in questa definizione entrando esplicitamente la direzione degli assi, si introduce un elemento estraneo alla superficie, ciò che sarebbe bene evitare.

Ciò è perfettamente giusto, quantunque si possa tosto dimostrare come il limite delle aree analoghe a T sia lo stesso qualunque sia la direzione degli assi coordinati. Del resto, come già abbiamo osservato, di qualche elemento estraneo non può fare a meno neanche la definizione proposta dallo stesso *Maggi*.

È da osservare che i Matematici ricordati da principio consideravano, in sostanza, anch'essi l'area della superficie come il limite dell'area delle superficie circoscritte; cosicchè, si può dire, la definizione di *Hermite* è una traduzione rigorosamente enunciata dei concetti di quelli.

Jordan (2) non riproduce la definizione di *Hermite*, ma considerando solamente superficie a piano tangente variabile da punto a punto con continuità, postula una proprietà per gli elementi infinitesimi di superficie. Questo postulato equivale ad una definizione; anzi, si può dire, è un surrogato della definizione di *Hermite* per le superfici da lui considerate.

Si abbia infatti una superficie le cui equazioni parametriche siano

$$x = \varphi_1(u, v), \qquad y = \varphi_2(u, v), \qquad z = \varphi_3(u, v),$$

ove le φ_1, φ_2, φ_3 ammettano, in un campo E di valori per u, v, derivate parziali continue che simultaneamente non annullino i tre Jacobiani

$$A = \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\frac{\partial \varphi_3}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}$$

$$B = \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\frac{\partial \varphi_3}{\partial v}$$

$$C = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\frac{\partial \varphi_2}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\frac{\partial \varphi_1}{\partial v},$$

e di più siano tali da non assumere per coppie diverse di valori u, v uguali terne di valori per x, y, z.

Se x, y, z è un punto della superficie corrispondente alla coppia di valori u, v dei parametri, X, Y, Z un altro punto corrispondente a $u + du$, $v + dv$, e se ad ogni punto X, Y, Z si associa il punto

$$\xi = x + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} dv$$

$$\eta = y + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} du = \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} dv$$

$$\zeta = z + \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} dv,$$

si vede facilmente che mentre u, v prendono tutti i valori contenuti in un

(1) Per citarne qualcuno: Picard, Pascal, D'Arcais, Cesàro, Vivanti, ecc.
(2) JORDAN, l. c., vol. I, pag. 146 e segg.

quadrato infinitesimo Q_k, il punto X, Y, Z descrive sulla superficie un quadrilatero S_k ed il punto ξ, η, ζ un quadrilatero piano T_k di misura

$$Q_k \sqrt{A_k^2 + B_k^2 + C_k^2},$$

essendo A_k, B_k, C_k i valori di A, B, C in un vertice di Q_k.

Perchè Q_k è infinitesimo e per la continuità delle φ, ogni punto X, Y, Z resta infinitamente vicino a ξ, η, ζ di guisa che infinitamente vicini saranno l'elemento di superficie S_k ed il quadrilatero piano T_k: si è pertanto condotti ad ammettere che l'area S_k sia diversa da T_k per infinitesimi di ordine superiore.

Allora alla somma delle S_k si può sostituire il limite della somma dei T_k per tutti i Q_k in cui si divide il campo E; e questo limite sarà l'area della porzione di superficie che si ottiene facendo percorrere ad u, v tutto il campo E.

Nelle ipotesi poste da *Jordan* il limite della somma dei T_k esiste certamente e poichè l'insieme dei T_k forma la superficie discontinua T considerata da *Hermite*, si vede chiaramente che la definizione di area data da *Jordan* non è che quella di *Hermite* applicata alle superficie a piano tangente variabile da punto a punto con continuità.

8. Una definizione che fa a meno di ogni elemento estraneo alla superficie è quella proposta da *Peano.* (1)

Se è data una superficie, si scomponga in parti e dopo averle trasportate comunque nello spazio, si proiettino queste ortogonalmente su d'uno stesso piano. La somma delle aree di queste proiezioni sarà un'area piana, la quale varia col variare del modo di divisione della superficie in parti o col variare del modo con cui si dispongono queste parti. Il limite superiore dei valori di quest'area piana si dice area della superficie data.

A questa definizione *Peano* ha dato, nella memoria già citata, un'altra forma, mediante l'introduzione dei *bivettori.*

Chiamata bivettore una linea piana chiusa, quando si consideri oltre all'area da essa limitata (grandezza del bivettore) anche la giacitura del piano a cui essa appartiene, si può dimostrare che, data una linea chiusa non piana l, si può sempre determinare un bivettore l', in guisa che proiettando su un piano arbitrario l e l' secondo una direzione arbitraria, le aree limitate dalle loro proiezioni risultino sempre uguali.

Si può allora chiamare bivettore ogni linea chiusa piana o no: per grandezza e giacitura di un bivettore non piano l, si intende la grandezza e giacitura del bivettore piano equipollente l'.

Divisa una superficie in parti, si diranno bivettori delle parti stesse i bivettori formati dai loro contorni: allora la definizione data dianzi si può enunciare: « Area di una porzione di superficie è il limite superiore della somma delle grandezze dei bivettori delle sue parti ».

9. Le definizioni date fin qui per l'area di una superficie hanno tutte un carattere comune che è ben facile rilevare.

La determinazione dell'area di una qualunque figura piana rettilinea è possibile mercè la teoria dell'equivalenza dei poligoni, che trae origine dal concetto semplice di congruenza: la teoria dell'equivalenza associata al concetto di limite rende possibile la misura dell'area di una qualunque figura piana, potendosi considerare come il limite dell'area di figure poligonali.

---

(1) PEANO, *Applicazioni geometriche del Calcolo infinitesimale.* 1887.

Venendo a considerare superficie non piane, non si può pensare ad una teoria dell'equivalenza analoga a quella per le figure piane, perchè non esistono, in generale, sulle superficie curve parti congruenti.

Ed ecco tutte le definizioni che abbiamo riportate ispirate al concetto di considerare l'area di una superficie curva come il limite delle aree di superficie piane.

Ma recentemente è stata data dal *Minkowski* (1) una definizione che astrae completamente dai concetti precedenti, sibbene dipende dal concetto più semplice di volume.

Sia F una superficie; in ciascun punto di essa come centro si pensi costruita una sfera di raggio r. Tutti i punti dello spazio interni alle sfere o sulle loro superficie costituiscono il luogo dei punti che hanno dalla F una distanza minore od uguale ad r. Sia $V(r)$ il volume di questo campo; il limite, se esiste, di $\frac{V(r)}{2r}$ al tendere a zero di r, è l'area della superficie F.

Si può notare che l'idea ispiratrice della definizione di *Minkowski* si trova già in una nota pubblicata da *Borchardt* nel 1854. (2) In essa proponendosi di calcolare l'area di una superficie chiusa F mediante un integrale triplo esteso a tutti gli elementi del volume racchiuso dalla superficie F, osserva che l'area di una superficie può essere considerata come il limite verso cui tende il rapporto di cui il numeratore è il volume compreso fra la superficie ed una superficie parallela, ed il denominatore la distanza delle due superfici.

Molto opportunamente *Minkowski* evita la considerazione di superficie parallele per non dover ammettere per le superfici di cui si vuol definire l'area, l'esistenza della normale determinata in tutti i suoi punti.

Questa definizione, che asseconda il concetto intuitivo che si ha di superficie come lamina di spessore evanescente, appare perfettamente rigorosa: ma se in una definizione di area si deve tener anche conto della possibilità dell'effettiva sua valutazione seguendo, naturalmente, i concetti enunciati nella definizione stessa, questa di *Minkowski* appare quella che a ciò meno si presta. (3)

FILIPPO SIBIRANI
(*Bologna*).

---

(1) MINKOWSKI, *Ueber die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen*. Jahresbericht der Deutschen Matematiker Vereinigung.

(2) BORCHARDT, *Werke*, pag. 67.

(3) Minkowski dà una definizione analoga per le lunghezze di una linea. Sia C una curva piana o storta e in ogni punto di essa come centro si costruisca una sfera di raggio r. L'insieme dei punti interni alle sfere o sulle loro superficie costituisce il luogo dei punti che hanno dalla linea una distanza minore od uguale ad r. Sia $V(r)$ il volume di questo campo; il limite se esiste, di $\frac{V(r)}{\pi r^2}$ al tendere a zero di r, è la lunghezza della linea C.

CORRISPONDENZA

S. Stefano Magra, agosto 1905

Caro Lazzeri,

Nella terza edizione dell'Algebra elementare, che Ella ha certamente ricevuta, mi è sfuggita un'inesattezza in un punto abbastanza importante.

Vi ha richiamato sopra la mia attenzione, il mio amico prof. Grandi.

1. A pag. 287 è detto che se la successione

$$\varepsilon_1\,,\quad \varepsilon_2\,,\quad \varepsilon_3\,,\ldots \tag{1}$$

è costantemente decrescente, le successioui

$$\left.\begin{matrix} a_1\,, & a_2\,, & a_3\,,\ldots \\ b_1\,, & b_2\,, & b_3\,,\ldots \end{matrix}\right\} \tag{2}$$

dei valori approssimati per difetto i primi, per eccesso i secondi a meno rispettivamente di

$$\varepsilon_1\,,\quad \varepsilon_2\,,\ldots$$

resultano crescente l'una, decrescente l'altra.

In forma così generale, ciò non è esatto; per es. a_1 che è approssimato a meno di ε_1 può bene esserlo anche a meno di ε_2, e allora potrebbe a_2 non essere maggiore di a_1.

Ma è facile vedere che in seno alle successioni

$$\left.\begin{matrix} a_1\,, & a_2\,,\ldots \\ b_1\,, & b_2\,,\ldots \end{matrix}\right\} \tag{2}$$

esistono sempre due successioni rispettivamente crescente l'una, decrescente l'altra.

Si fissi per es. nella prima delle (2) un termine qualsiasi a_r: vi può essere solo un numero finito di termini, i quali siano minori o uguali ad a_r, giacchè se ve ne fossero infiniti a_{r_1}, $a_{r_2},\ldots$ questi, per dato, sarebbero approssimati ad α per meno di ε_1, $\varepsilon_2,\ldots$ rispettivamente, e così a_r lo sarebbe pure a meno di ciascuno di questi ε_{r_1}, $\varepsilon_{r_2},\ldots$ i quali convergono a zero: ma a_r è un numero prefissato; dovrebbe dunque essere $a_r = \alpha$, il che non è se α è irrazionale.

Ciò premesso, fra i termini successivi ad a_1 nella prima delle (2), si trova sicuramente un termine $a_p > a_1$: tra quelli successivi ad a_p similmente si trova, dopo un numero finito di termini, uno $a_q > a_p$ e così indefinitamente; con che rimane provata la esistenza di una successione

$$a_1\,,\quad a_p\,,\quad a_q\,,\ldots$$

che si può estrarre dalla

$$a_1\,,\quad a_2\,,\quad a_3\,,\ldots$$

e che è costantemente crescente.

Analogamente dalla

$$b_1\,,\quad b_2\,,\quad b_3\,,\ldots$$

si può estrarre una successione

$$b_1\,,\quad b_s\,,\quad b_t\,,\ldots$$

costantemente decrescente.

Queste due

$$a_1,\quad a_p,\quad a_q,\dots$$
$$b_1,\quad b_2,\quad b_3,\dots$$

seno le successioni convergenti ad α, secondo le condizioni dette a pag. 288.

2. Se in posto dei numeri

$$\varepsilon_1,\quad \varepsilon_2,\dots$$

si prendono ad esempio i numeri

$$\varepsilon,\quad \tfrac{1}{2}\varepsilon,\quad \tfrac{1}{4}\varepsilon,\dots$$

allora le successioni approssimate

$$a_1,\quad a_2,\dots$$
$$b_1,\quad b_2,\dots$$

formate secondo il modo detto al n. 108, diventano le altre

$$\left.\begin{matrix} a+(n-1)\varepsilon, & a+(p-1)\tfrac{1}{2}\varepsilon, & a+(q-1)\tfrac{1}{4}\varepsilon,\dots \\ a+n\varepsilon, & a+p\tfrac{1}{2}\varepsilon, & a+q\tfrac{1}{4}\varepsilon,\dots \end{matrix}\right\} \qquad (3)$$

e queste sono, la prima costantemente crescente o almeno non decrescente, in quanto che possono esservi successivi termini eguali: la seconda costantemente decrescente, o almeno non crescente.

Se α è irrazionale, i termini che possono resultare eguali tra loro, sono sempre solo in numero finito: se invece α è razionale, nelle successioni costruite nel modo ora detto, potranno presentarsi infiniti termini eguali fra loro e così eguali ad α medesimo.

Se alle successioni soddisfacenti a queste condizioni si estende pure la denominazione di successioni convergenti, e nella teoria delle operazioni sui numeri irrazionali si fa uso di siffatte coppie di successioni, allora basterà sostituire (vedi pag. 292 e seguenti) le parole *non minore* alla parola *maggiore* e le parole *non maggiore* alla parola *minore*, nelle osservazioni relative al caso che α e α' siano razionali.

In un mio opuscolo *sui limiti e sui numeri irrazionali*, pubblicato nel 1877, è indicato un modo semplice di costruire successioni convergenti alla radice quadrata, cubica, ecc., di un numero che non è quadrato, cubo, ecc., rispettivamente di un numero razionale.

Se Ella crede di inserire nel prossimo numero del " Periodico „ l'osservazione qui esposta, mi farà cosa gradita.

. . . .

ARZELÀ.

QUISTIONI PROPOSTE

699. Sia M un punto variabile sopra un' ellisse di fuochi F ed F'. Il circolo di centro M e tangente all'asse maggiore incontra le rette MF e MF' in quattro punti.

Trovare l'area della curva luogo di questi quattro punti.

700. Da un punto P del piano di una parabola si conducano le tre normali, di cui i piedi siano A, B, C. Le tangenti in A, B, C s'incontrino nei punti A_1, B_1, C_1.

Dimostrare che:

1°. La retta congiungente P coll'ortocentro del triangolo $A_1 B_1 C_1$ è parallela alla congiungente l'ortocentro del triangolo A B C col circuncentro del triangolo $A_1 B_1 C_1$.

2°. I tre punti A_1, B_1, C_1 sono situati sopra un'iperbole equilatera avente per assintoti l'asse e la tangente nel vertice della parabola data. Questa iperbole non cambia, se P si sposta sopra una retta parallela all'asse della parabola.

701. Sia M un punto variabile sopra un'ellisse della quale F, F' sono i fuochi, A, A' gli estremi dell'asse maggiore. Dimostrare che le bisettrici degli angoli MFF', MF'A' incontrano MA sulle due direttrici rispettivamente.

702. Se M è un punto d'un'ellisse, della quale F, F' sono i fuochi, M' è il simmetrico di M rispetto all'asse minore, F_1 F'_1 sono i secondi punti d'incontro dell'ellisse colle rette MF, MF', dimostrare che la retta F_1F_1 e la tangente di M' s'incontrano sull'asse maggiore.

E.-N. Barisien.

703.[1] Sopra una retta r sono dati due punti fissi A_1, A_2 ed un punto mobile M. Costruiti i circoli c_1, c_2 di diametri A_1M, MA_2 aventi per centri i punti C_1, C_2, si domanda:

1° il luogo dei punti d'incontro delle tangenti condotti da A_1 a c_2 con le tangenti condotte da A_2 a c_1;

2° il luogo dei punti d'incontro delle tangenti condotte da C_1 a c_2 colle tangenti condotte da C_2 a c_1;

3° il luogo dei punti d'incontro delle tangenti condotte da A_1 al circolo di centro A_2 e raggio A_2M colle tangenti condotte da A_2 al circolo di centro A_1 e raggio A_1M.

Si faccia uno studio di queste curve. Fumagalli.

BIBLIOGRAFIA

Lindelöf. — *Le Calcul des résidus et ses applications a la théorie des functions.* (Collection de monografies sur la théorie des functions publiée sus la direction de M. Emile Borel). Paris, Gauthier-Villars, 1905, VII — 144 pages,

Questo volume del sig. *Lindelöf* professore all'Università di Helsingfors è il nono della collezione di monografie sulla teoria delle funzioni, felicemente iniziata dal *Borel* nel 1905 e continuata dal Borel stesso, dal *Lebesgue,* dal *Baire* e da altri.

È noto che se $x = a$ è un punto singolare di una funzione variabile complessa olomorfa in un campo connesso C, *Cauchy,* al quale si devono i primi e classici studi sulla funzione di variabili complesse, chiamò *residuo della funzione* f(x) *relativo al punto singolare* x = a l'espressione

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L f(z)\,dz$$

essendo L un contorno chiuso semplice interno a C e inviluppante il punto a.

[1] Ripetiamo questa quistione pubblicata col numero 662 nel fasc. IV, anno XIX, della quale non ci sono pervenute risoluzioni soddisfacenti.

" I progressi (così scrive l'A. nella prefazione) realizzati da alcuni anni nella
" teoria delle funzioni analitiche hanno fatto risaltare quanto siano sempre fecondi
" ed efficaci i metodi ingegnosi creati da Cauchy, fra i quali conviene citare in
" primo luogo il calcolo dei residui. Non è dunque senza interesse di tornare ora
" su questo calcolo classico e di studiare sistematicamente la parte che ha nella
" teoria delle funzioni propriamente dette. È ciò che abbiamo tentato di fare in
" questo piccolo libro, allo scopo di facilitare in una certa misura l'accesso alle
" parti moderne dell'analisi ".

Il libro si compone di cinque capitoli cioè:

I. — *Principi e teoremi fondamentali.*

II. — *Applicazioni diverse del calcolo dei residui.* — Funzioni simmetriche delle radici d'un'equazione — Sviluppo di funzioni implicite — Alcune applicazioni alle funzioni meromorfe — Calcolo di alcuni integrali definiti.

III. — *Formole sommatorie tratte dal calcolo dei residui.*

IV. — *Le funzioni* $F(x)$, $\zeta(x)$, $\zeta(s, w)$.

V. — *Applicazione al prolungamento analitico e allo studio assintotico delle funzioni definite da uno sviluppo di Taylor.*

CASTELNUOVO. — *Lezioni di geometria analitica e proiettiva.* Volume II, Roma, Società editrice Dante Alighieri, 1905.

Nel fascicolo III, Anno XIX di questo *Periodico* è stato reso conto del I volume del corso di geometria analitica e proiettiva del prof. *Castelnuovo*, corso che viene ora condotto a compimento con questo II volume, testè pubblicato.

Il 1° volume era diviso in tre parti rispettivamente destinate allo studio delle forme di prima specie, delle forme di seconda specie, e delle coniche. Il 2° volume è diviso in due parti delle quali ecco il sommario:

PARTE IV. — *Geometria analitica dello spazio.*

I. Relazioni di posizione tra punti, rette, piani — II. Distanze, angoli, aree, volumi — III. Trasformazione delle coordinate. Coordinate omogenee di punti e piani. Coordinate proiettive — IV. Rappresentazione analitica delle superficie e delle linee nello spazio — Proiettività fra due spazi.

PARTE V. — *Superficie di second'ordine.*

I. Polarità definita dalla superficie — II. Rette di una quadrica. Generazione delle quadriche. Fasci e schiere di quadriche — III. Proprietà diametrali — IV. Equazioni ridotte delle quadriche — V. Sezioni circolari. Quadriche composte.

È superfluo il dire che in questo secondo volume è mantenuto il metodo adottato nel primo, cioè le considerazioni algebriche e geometriche sono armonicamente fuse fra loro ed adoperate a vicenda ora l'une ora l'altre, secondo che queste o quelle meglio si prestano allo studio delle singole quistioni. In abbondanti esercizi messi alla fine dei vari capitoli, sono molte teorie accessorie notevoli.

Insomma il 2° volume ha gli stessi pregi del 1°, e tutti e due costituiscono un'opera degna della fama dell'illustre autore.

THOMSON. — *Elettricità e materia.* Traduzione con aggiunte di G. Faè. Manuali Hoepli, 1905.

Quest'aureo libretto raccoglie un corso di lezioni che *J. J. Thomson*, uno dei maggiori scienziati inglesi fece nel maggio 1903 alla Yale University nella città di New Haven per conto della fondazione *Silliman*.

Questa fondazione costituita da un capitale di ottantamila dollari, donato all'Yale College dai figli della sig.ra *Hepsa Ely Silliman*, ha per iscopo di stabilire un corso annuale di lezioni in memoria della predetta signora, " destinate ad " illustrare la presenza, sapienza e bontà di Dio, quali si manifestano nel mondo " morale ". Ogni corso annuale deve raccogliersi in volume, da formare parte d'una serie in memoria della sig.ra *Silliman*.

" Com' era credenza del testatore, ogni esposizione ordinata dei fatti della
" natura o della storia avrebbe contribuito allo scopo di questa fondazione con
" più efficacia di qualsiasi tentativo di esaltare i precetti della religione e della
" fede; e stabilì, per conseguenza, che dovessero venir escluse dal fine della fon-
" dazione stessa lezioni di teologia dogmatica o critica, e che gli argomenti
" dovessero scegliersi, piuttosto, nel campo delle scienze naturali e della storia,
" dando, in particolare, la preferenza all'astronomia, alla chimica, alla geologia ed
" all'anatomia „.

In base a questi concetti che dànno alla fondazione Silliman un carattere eminentemente utile e pratico, è stato molto opportunamente scelto come corso inaugurale questo dell'illustre Thomson. In esso è trattata particolarmente l'influenza dei recenti progressi della scienza elettrica sulle teorie riguardanti la costituzione della materia e della natura dell'elettricità: due questioni connesse probabilmente in modo tanto intimo che la soluzione dell'una aiuterà quella dell'altra. Un aspetto caratteristico — come dice il Thomson — delle recenti indagini elettriche, quali lo studio e la scoperta dei raggi catodici, dei raggi di Röntgen e delle sostanze radioattive, è la condizione affatto speciale in cui esse hanno posto il legame fra materia ed elettricità. Un esame dell'influenza del recente lavorìo sull'anzidetta correlazione parve all'Autore dovesse riuscire opportuno, specialmente perchè il discutere in proposito suggerisce una moltitudine di problemi — splendido argomento per ulteriori investigazioni.

Il libro è in sei capitoli. Il primo è dedicato allo studio del campo elettrico, con particolare riguardo alle linee di forza del sommo Faraday. Nel secondo si tratta della massa elettrica e si introduce il nuovo concetto di massa d'etere coinvolta. Nel terzo degli effetti dovuti all'accelerazione dei tubi di Faraday, con speciale riguardo ai raggi di Röntgen e alle onde luminose. Il quarto riguarda l'importantissima teoria della struttura atomica dell'elettricità, corroborata da numerose indagini odierne. Il quinto ha per titolo la costituzione dell'atomo: e si discute l'origine e l'evoluzione degli elementi chimici. Il sesto, in fine, è un succoso riassunto dei fenomeni di radioattività, con acuto esame critico della teoria dei medesimi, in raffronto con quella corpuscolare della materia e dell'elettricità, concepita dall'Autore.

Ogni argomento è esposto in forma piana, spoglia del tecnicismo proprio delle Memorie accademiche, in guisa che può essere compreso da qualsiasi persona di media cultura. E il dott. Faè, in vista dell'importanza dell'argomento e del modo con cui è trattato, reputò utile — come osserva nella sua prefazione — divulgare cotesto libro, porgendolo anche in veste italiana. Il Faè non si è limitato alla semplice traduzione: seguendo con cura i progressi della scienza, ha corredato il libro di varie aggiunte, particolarmente intorno ai fenomeni di radioattività, i quali sono in via di rapida evoluzione. Egli ha registrato le recenti pubblicazioni apparse in argomento perfino durante la stampa e — con giusta misura — ha notato importanti lavori compiutisi anche in Italia, ponendo in appendice quanto non potè trovar luogo nel testo. Vi si troverà, ad esempio, una notevole comunicazione del Nasini sopra indagini ancora inedite, che l'illustre Chimico ha in corso, riguardanti la radioattività delle sorgenti e dei minerali italiani. Dal Traduttore furono pure aggiunti un sommario dei capitoli ed un indice alfabetico.

Riassumendo: è un libro di piccola mole, ma grande per densità di pensiero; e può affermarsi con sicurezza che il prof. Faè ha fatto molto bene a tradurla e l'Hoepli ha fatto bene a pubblicarlo con la solita cura ed eleganza.

K.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 18 settembre 1905

GIORNALI CHE FANNO IL CAMBIO COL "PERIODICO DI MATEMATICA„

Italiani:

Atti della R. Accademia di Bologna.
Atti della R. Accademia di Napoli.
Atti del R. Istituto Veneto.
Atti dell' Accademia pontaniana (Napoli).
Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze matematiche (Torino).
Giornale di Battaglini (Napoli).
Il Monitore Tecnico (Milano).
Il Nuovo Cimento (Pisa).
La Rassegna tecnica (Messina).
La Rivista tecnica (Torino).
La Rivista tecnica italiana (Roma).
La Scuola Secondaria Italiana (Milano).
L'eco degli Ingegneri e Periti agrimensori (Pescia).
Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.
Rivista agricola industriale (Roma).
Rivista di Matematica (Torino).
Rivista Marittima (Roma).

Stranieri:

American Journal of Mathematics (Baltimore).
American mathematical Monthly (Kidder).
Annals of matematics (Cambridge-Mass).
Bibliotheca mathematica (Leipzig).
Bulletin de la Société mathématique de France (Paris).
Bullettin de la Société phisico-mathématique de Kasan (Kasan).
Bullettin of the American mathematical Society (New-York).
Communications de la Société Mathématique de Kharkow (Kharkow).
Gaceta de matemàticas elementales. Vitoria (Spagna).
Intermédiaire des Mathématiciens (Paris).
Jahresberichte der Deutschen mathematiker Vereinigung (Berlin).
Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas (Coimbra).
Journal de mathématiques élémentaires par H. Vuibert (Paris).
L'Education mathématique par I. Griess et H. Vuibert (Paris).
L'Enseignement mathém., revue internationale par Laisant et Fehr (Paris).
Mathematical Gazette (London).
Mathesis (Gand).
Memorias de la Sociedad çientifica Antonio Alzate (Mexico).
Niew Archief voor wiskunde (Amsterdam).
Nouvelles annales (Paris).
Proceedings of the London mathematical society.
Report of the National Museum (Washington).
Report of the Smithscnian Institution (Washington).
Revista trimestral de matemáticas (Zaragoza).
Revue semestrielle des publications mathématiques (Amsterdam).
The annals of mathematics (Cambridge-Massachusset).
The Proceedings and Transactions of the Nova Scotian Institute of Science (Halifax, Nova Scotia).
Transactions of the Texas Academy of Science (Austin).
Viadomosci matematycznych (Warszawa).
Vèstnik òpitnoi Fisiki i elementarnoi Matemàtichi. Isdavaemii V. A. Ghernietom. Pod redaktsiei V. A. Zimmermana. Odessa (Russia).
Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht (Leipzig).
Wiskundig Tijdschrift (Rotterdam).

CONDIZIONI DI ABBONAMENTO

AL

PERIODICO DI MATEMATICA

		Italia	Estero
Periodico di matematica	L.	8	9
Supplemento al Periodico di matematica . . .	„	2	2,50
Periodico e Supplemento	„	9,50	11

Non si fanno altro che abbonamenti annui decorrenti dal 1° luglio al 30 giugno dell'anno successivo.

Per accordi presi col Presidente dell'Associazione " Mathesis „ i signori soci di quest'Associazione potranno avere l'abbonamento al *Periodico di Matematica* al prezzo di L. **6** (in aggiunta alla quota sociale, pure di L. 6), **pagato anticipatamente** al Segretario dell'Associazione, prof. **Gaetano Riboni**, *Via Vittoria 53, Milano.*

AVVISO

Presso la Sig.ra **PIA PADERNI ved. LUGLI, via Agostino Depretis n. 86, Roma,** trovansi vendibili, legate in volumi, le serie complete del *Periodico*, dal 1° a tutto il 10° anno al prezzo ridotto di **Lire 50** all'interno e di **Franchi 60** in oro, per gli Stati dell'Unione Postale; e le annate complete separate, pure rilegate in volumi dal 3° al 10° anno, nonchè i fascicoli sciolti dei suddetti anni, a prezzi da convenirsi.

Le annate dalla 11ª alla 20ª (1896-1905) del *Periodico di Matematica* si trovano in vendita presso la direzione al prezzo di **L. 6** per l'interno e di **L. 7** per l'estero, le prime tre, e di **L. 8** per l'interno e **L. 9** per l'estero le altre.

Anno XXI Settembre-Ottobre 1905 Fasc. II

PERIODICO DI MATEMATICA

PER

L' INSEGNAMENTO SECONDARIO

fondato da DAVIDE BESSO, continuato da AURELIO LUGLI

ED ATTUALMENTE DIRETTO

DAL

Prof. GIULIO LAZZERI

Serie III — Volume III

SOMMARIO:

LIVORNO

TIPOGRAFIA DI RAFFAELLO GIUSTI

1905

LIBRI ED OPUSCOLI RICEVUTI DALLA DIREZIONE

ALASIA. — *Josiah Willard Gibbs in memoriam.* (Rivista di Fisica, Matematica e Scienze Naturali. Pavia, 1905.)

APPEL. — *Cours de Mécanique* à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales, conforme au Programme du 27 juillet 1904. Deuxième éditions, entièrement refondue. Paris, Gauthier-Villars, 1905.

BERZOLARI. — *Sui sistemi di* n + 1 *rette dello spazio ad* n *dimensioni, situate in posizione di Schläfli.* (Rendic. del Circolo Matematico di Palermo, 1905.)

— — *Osservazioni alla nota precedente del prof. E. Ciani « Sopra le curve gobbe razionali di quint'ordine.* (Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e lettere 1905.)

CAPELLI. — *Sulle formule generali di addizione delle funzioni* θ *di più argomenti.* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1905.)

CARRARA. — Presentazione e sunto di una sua memoria: *L'unicuique suum nella scoperta delle macchie solari.* (Atti della pontificia Acc. Romana dei Nuovi Lincei, 1905.)

CATANIA. — *Trattato di algebra elementare ad uso degli istituti tecnici.* Catania, Giannotta, 1906.

CIPOLLA. — *Theoria de congruentia intra numeros integro.* (Revue de Mathématiques par G. Peano, 1905.)

CREPAS. — *Nozioni di aritmetica e geometria: per la 4ª classe elementare; per la 5ª; e per la 6ª.* Milano, Trevisini, 1904.

LORIA. — *Paolo Paci.* Cenno necrologico. Genova, Olivieri e C. 1905.

MARSEGLIA. — *Formola binomiale di Newton e analisi indeterminata di primo grado.* Appendici ai complementi di Aritmetica. Napoli, D'Auria, 1906.

MURER. — *Libro di matematica ad uso degli studenti della prima classe dei licei.* Paravia, 1906.

Réformes à accomplir dans l'enseignement des mathématiques. Opinion de M. Gino Loria (Gênes). Opinion de M. Emile Borel (Paris). (L'Enseignement mathématique, 1905.)

SIBIRANI. — *Un problema di geometria elementare.* (Bollet. di Matematica, 1905.)

AVVISO

Fondamenti per la geometria dell'*n-edro* in uno spazio lineare con $n-1$ dimensioni

§ 1. — Teoremi fondamentali.

Dati in uno spazio lineare S_{n-1} n punti $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ *indipendenti*, tali cioè che k qualunque di essi $(2 \leqslant k \leqslant n)$ non appartengono a un S_{k-2}, diremo *n-edro* la figura costituita da essi, dai segmenti $A_i\,A_k$ in numero di $\binom{n}{2}$, dai triangoli $A_i\,A_k\,A_h$ in numero di $\binom{n}{3}$, ecc. che si diranno gli *elementi dell'n-edro.* All'elemento individuato da $k+1$ fra i punti dati daremo il nome di *faccia a* k *dimensioni* quando k sia compreso fra 2 e $n-2$ (i limiti inclusi) e quello di *faccia,* senza aggiungere altro, all'elemento costituito da $n-1$ punti: diremo *spigolo* l'elemento costituito da due soli punti. Due elementi individuati uno da $k+1$ vertici, l'altro dai rimanenti $n-k-1$ li diremo *opposti*: indicheremo costantemente con a_h la misura della faccia opposta al vertice A_h. Due facce a_h e a_k hanno in comune una faccia a $n-3$ dimensioni che indicheremo o con la notazione a_{hk} o mediante i vertici da cui essa è individuata, come meglio ci tornerà opportuno. Gli S_{n-2} di esse facce hanno in comune un S_{n-3} che diremo *costola* del diedro da esse compreso: indicheremo con $(a_h a_k)$ la misura dell'angolo rettilineo che si ottiene tagliando il detto diedro con un S_2 normale all'S_{n-3} costola.

A fondamento delle nostre ricerche porremo il

Teorema I. — *Una faccia di un n-edro è uguale alla somma dei prodotti delle altre* n — 1 *per i coseni degli angoli che esse formano con la prima.*

Avremo così:

$$a_1 = a_2 \cos(a_2 a_1) + a_3 \cos(a_3 a_1) + \ldots + a_n \cos(a_n a_1)$$
$$a_2 = a_3 \cos(a_3 a_2) + a_4 \cos(a_4 a_2) + \ldots + a_1 \cos(a_1 a_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n = a_1 \cos(a_1 a_n) + a_2 \cos(a_2 a_n) + \ldots + a_{n-1} \cos(a_{n-1} a_n).$$

Moltiplichiamo queste n relazioni ordinatamente per $a_1\varepsilon_1, a_2\varepsilon_2, a_n\varepsilon_n$, dove con ε_s in generale indichiamo l'unità positiva o negativa, e sommiamole membro a membro. Allora se n è pari otterremo $\frac{n}{2}$ gruppi

diversi di formule, corrispondentemente all'ipotesi che delle ε una sola, o due,... o $\frac{n}{2}$ siano positive; se n è dispari di questi gruppi ne otterremo invece $\frac{n-1}{2}$.

Se p fra le ε sono positive, sarà:

$$\sum_1^p a_k^2 - 2\sum_1^p a_i a_h \cos(a_i a_h) = \sum_{p+1}^n a_r^2 - 2\sum_{p+1}^n a_l a_m \cos(a_l a_m), (i \mp h, l \mp m) \quad (T)$$

il tipo di ogni formula del gruppo corrispondente, il quale consterà di $\binom{n}{p}$ di tali relazioni.

In particolare poi, per p eguale ad uno avremo:

$$a_1^2 = a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + \ldots + a_n^2 - 2a_2a_3\cos(a_2a_3) \ldots - 2a_{n-1}a_n\cos(a_{n-1}a_n)$$

cioè il

Teorema II. — *Il quadrato di una faccia di un n-edro è uguale alla somma dei quadrati delle rimanenti diminuita del doppio dei prodotti di esse due a due per i coseni degli angoli compresi.*

Questo resultato è l'estensione del *teorema di Carnot.* Ne segue il

Corollario. — *Se un angoloide di n-edro è* (n — 1) — *rettangolo, il quadrato della faccia ad esso opposta è uguale alla somma dei quadrati delle altre facce.*

Questo resultato costituisce l'estensione del *teorema di Pitagora.*

§ 2. — I punti notevoli.

In questo paragrafo mostreremo l'esistenza dei punti notevoli nell'*n-edro,* faremo vedere cioè che diviso ciascuno spigolo secondo la legge rappresentata per lo spigolo A_iA_h dalla relazione:

$$A_iP_{ih} : P_{ih}A_h = a_h^p : a_i^p \qquad (\alpha)$$

gli S_{n-2} che proiettano i punti P_{ih} così ottenuti dagli S_{n-3} opposti passano per un medesimo punto. Esporremo per disteso la dimostrazione per il pentaedro di S_4 e da essa ci verrà additata la via da seguirsi nel caso generale.

Siano adunque A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 i vertici del pentaedro e supponiamo soddisfatte le condizioni (α) che in questo caso sono in numero di dieci. Da queste segue che in una qualsivoglia a_i delle facce del pentaedro gli S_2 che proiettano dagli spigoli i punti determinati dalle (α) sugli spigoli opposti concorrono in un punto P_i. Se noi riusciremo a dimostrare che le congiungenti A_i P_i, che sono in numero di cinque, passano per un medesimo punto, sarà dimostrata anche la nostra tesi.

A questo scopo formiamo il quadro:

$$\begin{array}{ccccc}
\overbrace{\qquad}^{P_5} & \overbrace{\qquad}^{P_4} & \overbrace{\qquad}^{P_3} & \overbrace{\qquad}^{P_2} & \overbrace{\qquad}^{P_1} \\
A_1A_2P_{34} & A_1A_2P_{35} & A_1A_2P_{45} & A_1A_3P_{45} & A_2A_3P_{45} \\
A_2A_3P_{14} & A_1A_3P_{25} & A_1A_4P_{25} & A_1A_4P_{35} & A_2A_5P_{34} \\
A_3A_4P_{12} & A_1A_5P_{23} & A_1A_5P_{24} & A_1A_5P_{34} & A_2A_4P_{35} \\
A_4A_1P_{23} & A_2A_3P_{15} & A_2A_4P_{15} & A_3A_4P_{15} & A_3A_4P_{25} \\
A_4A_2P_{13} & A_2A_5P_{13} & A_2A_5P_{14} & A_3A_5P_{14} & A_3A_5P_{24} \\
A_1A_3P_{24} & A_3A_5P_{12} & A_4A_5P_{12} & A_4A_5P_{13} & A_4A_5P_{23}
\end{array} \qquad (A)$$

Da esso risulta che tre qualunque delle A_iP_i giacciono in un S_3. In particolare le terne:

$$A_5P_5, \ A_4P_4, \ A_3P_3; \qquad A_5P_5, \ A_4P_4, \ A_2P_2$$

giacciono, l'una nell'S_3 individuato da A_3, A_4, A_5, P_{12} e l'altra nell'S_3 individuato da A_2, A_4, A_5, P_{13}. Ora si vede subito che queste due S_3 non possono coincidere, chè altrimenti i vertici del pentaedro giacerebbero tutti in un S_3: avranno dunque un S_2 in comune, del quale faranno parte A_5P_5 e A_4P_4. Così resta provato che due qualunque delle A_iP_i si incontrano, e poichè tutte non possono giacere nel medesimo S_2, passeranno per un medesimo punto, che sarà comune anche agli S_3 sopra notati.

Dietro l'esempio precedente ci riman facile dimostrare il teorema nel caso generale.

Supponiamo che, soddisfatte le condizioni (α), il teorema valga per l'$(n-1)$-*edro* di S_{n-2} e facciamo vedere che vale anche per l'*n-edro* di S_{n-1}. Osserviamo per ciò che in virtù dell'ipotesi noi potremo formare un quadro analogo al precedente:

$$\begin{array}{lll}
\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{P_n} & \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{P_{n-1}} \quad \ldots & \overbrace{\qquad\qquad}^{P_1} \\
A_1A_2\ldots A_{n-4}A_{n-3}P_{n-2\,.\,n-1} & A_1A_2\ldots A_{n-3}P_{n-2\,.\,n} & A_nA_{n-1}\ldots P_{3\,.\,2} \\
A_1A_2\ldots A_{n-4}A_{n-2}P_{n-3\,.\,n-1} & A_1A_2\ldots A_{n-4}P_{n-3\,.\,n-2} & A_nA_{n-2}\ldots P_{4\,.\,2} \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
A_{n-1}A_{n-2}\ldots A_3 \quad P_{12} & A_nA_{n-2} \ldots P_{12} & A_2A_3 \ldots P_{n-1\,.\,n}
\end{array} \quad (B)$$

dove gli S_{n-3} che figurano in ciascuna delle n colonne sono in numero di $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$. Esso ci mostra che le congiungenti A_iP_i, in numero di n, giacciono $n-2$ a $n-2$ in un S_{n-2}. Presi allora a considerare $n-2$ gruppi, di cui ciascuno contenga $n-2$ fra le A_iP_i e i corrispondenti S_{n-2}, sarà facile vedere che due qualunque delle A_iP_i giacciono in un S_2 e concludere come per l'S_4. Il nostro asserto, valendo già il teorema per l'S_4, rimane così provato.

Al punto comune alle A_iP_i e quindi anche agli S_{n-2} che dagli S_{n-3} proiettano i punti determinati delle (α) sugli spigoli opposti, daremo il nome di *punto notevole di ordine p* e le indicheremo con K_p. Sarebbe facile riconoscere che le distanze di K_p dagli S_{n-2} delle facce sono

proporzionali alle potenze $(p-1)$-esime delle facce medesime: ciò che giustifica le denominazioni di *baricentro, centro della ipersfera iscritta, punto di Lemoine* attribuite ai punti K_0, K_1, K_2.

Alla sezione prodotta nell'*n-edro* da un S_{n-2} determinato da $n-2$ vertici e da K_p, sezione che altro non sarà se non un $(n-1)$-*edro* dell'S_{n-2} segante, daremo il nome di *sezione ceviana di ordine p.*

§ 3. — Principio generale.

Il metodo di cui abbiamo fatto uso sopra mette in luce un principio che ci sarà molto utile in seguito e che vogliamo perciò esporre e dilucidare con qualche esempio nel presente paragrafo.

Abbiamo dimostrato riguardo al tetraedro il seguente:

PRINCIPIO. — *Detti* $A_i\, A_h\, A_k\, A_l$ *i vertici di un tetraedro, se si divide lo spigolo* A_iA_h, *e così gli altri cinque, con un punto* P_{ih} *secondo la legge rappresentata dalla relazione:*

$$A_iP_{ih} : P_{ih}A_h = \varphi : \psi, \qquad (\beta)$$

dove φ *e* ψ *sono note funzioni degli indici* i, h, k, l *o di parte di essi, le due condizioni:*

a) *che in ogni faccia risulti verificato il teorema di Ceva,*

b) *che scambiando fra loro nella* (β) *gli indici* i *e* h *e contemporaneamente* k *con* l, *la relazione non muti sostanzialmente,*

sono necessarie e sufficienti perchè il piano che proietta P_{ih} *dallo spigolo opposto, e i cinque analoghi, passino per un medesimo punto.*

Senza stare a riportare qui la dimostrazione di questo principio ci limitiamo a osservare che la seconda condizione altro non esprime se non che i punti determinati dalle (β) sugli spigoli sono determinati *in modo unico*: dopo questo resterà facile riconoscere che le due condizioni sono necessarie e sufficienti perchè i sei piani suaccennati passino pel medesimo punto.

Vediamo piuttosto come dev'essere modificato questo principio per l'*n-edro* di S_{n-1}. Rammentiamo perciò che per poter dimostrare l'esistenza del punto K_p ci è bastato, nel precedente paragrafo, di poter arrivare a formare il quadro (A) per il pentaedro di S_4 e il quadro (B) per l'*n-edro* di S_{n-1}. Ora, per il pentaedro, in virtù del suesposto principio esisteranno i punti $P_1, P_2, \ldots P_5$ e si potrà quindi scrivere il quadro (A) *allora* e *soltanto* quando la legge (β) sia tale che ne restino soddisfatte le due relative condizioni. In conseguenza, detti A_i, A_h, A_k, A_l, A_r, i vertici del pentaedro e

$$A_iP_{ih} : P_{ih}A_h = \varphi : \psi \qquad (\beta)$$

la legge rappresentativa, dove φ e ψ sono note funzioni di tutti o parte degl'indici *i, h, k, l, r*, sarà necessario e sufficiente che scam-

biando i con h e contemporaneamente una prima volta k con l, una seconda l con r, una terza k con r, le tre relazioni ottenute e quella di partenza siano *sostanzialmente* le stesse.

Per l'*n-edro* di S_{n-1}, senza riportare la dimostrazione, la quale sarebbe ovvia dopo quanto abbiamo detto per l'S_4, enuncieremo senz'altro il

PRINCIPIO. — *Condizioni necessarie e sufficienti affinchè diviso con un punto* P_{ih} *lo spigolo* A_iA_h *mediante la legge*

$$A_iP_{ih} : P_{ih}A_h = \varphi : \psi, \qquad (\beta)$$

dove φ *e* ψ *sono funzioni note di tutti o parte degl'indici* 1, 2, 3 ... n, *e in modo analogo gli altri spigoli, gli* S_{n-2} *che proiettano ciascuno di questi punti dall'*S_{n-3} *opposto passino per un medesimo punto sono:*

1° *che in ogni faccia a due dimensioni sia verificato il teorema di Ceva;*

2° *che scambiando in* (β) i *con* h *e contemporaneamente due qualunque dei rimanenti indici in tutti i modi possibili, le relazioni che si ottengono via via, che saranno al massimo* $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$, *siano sostanzialmente uguali fra loro e a quella di partenza.*

Per dare qualche dilucidazione sul principio precedente cominciamo dal cercare le condizioni necessarie e sufficienti perchè le n altezze di un *n-edro* passino per un medesimo punto.

Si abbassi da A_n l'altezza A_nP_n e da P_n si conducano nell'S_{n-2}, individuato dalla faccia a_n, P_nR perpendicolare all'S_{n-3} intersezione di a_n con a_2 e P_nS perpendicolare all'S_{n-3} intersezione di a_n con a_1.

Avremo allora:

$$P_nR = A_nP_n \operatorname{cotg}(a_na_2), \qquad P_nS = A_nP_n \operatorname{cotg}(a_na_1),$$

da cui

$$P_nR : P_nS = \operatorname{cotg}(a_na_2) : \operatorname{cotg}(a_na_1). \qquad (1)$$

Ma, detto P_{12} il punto ove l'S_{n-2} determinato da P_n e dall'S_{n-3} comune alle facce a_2 e a_1, è:

$$A_1P_{12} : P_{12}A_2 = P_nR \,.\, a_{n2} : P_nS \,.\, a_{n1}\,.$$

Da questa e dalla (1) si ricava allora:

$$A_1P_{12} : P_{12}A_2 = a_{n2} \operatorname{cotg}(a_na_2) : a_{n1} \operatorname{cotg}(a_na_1).$$

Questa è la legge di divisione per lo spigolo A_1A_2, dalla quale si passa subito alla legge generale:

$$A_iP_{ih} : P_{ih}A_h = a_{kh} \operatorname{cotg}(a_ka_h) : a_{ki} \operatorname{cotg}(a_ka_i) \qquad (k \neq i \neq h).$$

Essa ci mostra che in ogni faccia a due dimensioni è soddisfatto il teorema di Ceva.

Scambiando ora i con h e ponendo l al posto $k\,(l \neq k)$, si otterrà:

$$A_hP_{ih} : P_{ih}A_i = a_{li} \operatorname{cotg}(a_la_i) : a_{lh} \operatorname{cotg}(a_la_h)$$

e moltiplicando questa e la precedente proporzione termine a termine:

$$a_{kh} \cot g(a_k a_h) \,.\, a_{il} \cot g(a_l a_i) = a_{kl} (\cot g(a_k a_l) \,.\, a_{ih} \cot g(a_i a_h). \quad (2)$$

Scambiando in quest'ultima h con l otteniamo:

$$a_{kl} \cot g(a_k a_l) \,.\, a_{hi} \cot g(a_h a_i) = a_{ki} \cot g(a_k a_i) \,.\, a_{hl} \cot g(a_l a_h) \quad (3)$$

e riunendo infine le (2), (3):

$$a_{hk} \,.\, a_{il} \cot g(a_h a_k) \,.\, \cot g(a_l a_i) = a_{ki} a_{hl} \cot g(a_k a_i) \,.\, \cot g(a_h a_l) =$$
$$= a_{kl} a_{ih} \cot g(a_k a_l) \cot g(a_i a_h). \quad (4).$$

Queste relazioni saranno tante quante le combinazioni di n elementi presi quattro a quattro, cioè: $\binom{n}{4}$. Ciascuna di esse equivalendo a due condizioni distinte, quest'ultime saranno in numero di $2\binom{n}{4}$. Nel caso particolare di n uguale a quattro ritroviamo le due condizioni che devono essere soddisfatte per l'esistenza dell'*ortocentro* nel tetraedro.

Passiamo ora a scrivere le condizioni necessarie e sufficienti perchè le congiungenti i vertici dell'*n-edro* con i punti di contatto delle facce opposte coll'ipersfera iscritta passino per un medesimo punto.

Da K_1 caliamo $K_1A'_n$ perpendicolarmente all'S_{n-2} della faccia a_n e K_1A_{n2}, K_1A_{n1} perpendicolari agli S_{n-3} di cui fan parte a_{n2} e a_{n1} rispettivamente. Avremo, indicando con r la misura del raggio di detta ipersfera:

$$A'_n A_{n2} = r \cot g \tfrac{1}{2}(a_n a_2), \qquad A'_n A_{n1} = r \cot g \tfrac{1}{2}(a_n a_1),$$

e quindi

$$A'_n A_{n2} : A'_n A_{n1} = \cot g \tfrac{1}{2}(a_n a_2) : \cot g \tfrac{1}{2}(a_n a_1). \quad (5)$$

E poichè detto P_{12} il punto comune ad A_1A_2 e all'S_{n-2} passante per A'_n e per l'S_{n-3} opposto ad A_1A_2, si ha:

$$A_1P_{12} : P_{12}A_2 = A'_n A_{n2} \,.\, a_{n2} : A'_n A_{n1} \,.\, a_{n1} \,.$$

moltiplicando termine a termine quest'ultima proporzione e la (5) ricaveremo:

$$A_1P_{12} : P_{12}A_2 = a_{n2} \cot g \tfrac{1}{2}(a_n a_2) : a_{n1} \cot g \tfrac{1}{2}(a_n a_1).$$

In generale la legge di divisione degli spigoli è rappresentata da:

$$A_i P_{ih} : P_{ih} A_h = a_{kh} \cot g \tfrac{1}{2}(a_k a_h) : a_{ki} \cot g \tfrac{1}{2}(a_k a_i) \quad (k \neq h \neq i)$$

dalla quale segue che in ogni faccia è verificato il teorema di Ceva. Scambiando in questa i con h e ponendo l al posto di k, moltiplicando poi termine a termine questa e la precedente; indi nella relazione a cui in questo modo si perviene scambiando l con i, si arriva alle:

$$a_{kl} a_{ih} \cot g \tfrac{1}{2}(a_k a_l) \cot g \tfrac{1}{2}(a_i a_h) = a_{ki} a_{lh} \cot g \tfrac{1}{2}(a_k a_i) \,.\, \cot g \tfrac{1}{2}(a_l a_h) =$$
$$= a_{hk} a_{il} \cot g \tfrac{1}{2}(a_h a_k) \,.\, \cot g \tfrac{1}{2}(a_i a_l) \quad (6)$$

che portano, come nel caso precedente, a $2\binom{n}{4}$ condizioni.

Da ultimo ci proponiamo di trovare le condizioni necessarie e sufficienti perchè le congiungenti i vertici con i punti notevoli K_p delle facce opposte ($p \neq 0$) passino per un medesimo punto.

Scriveremo, considerando le spigolo A_iA_h come facente parte dell'$(n-1)$*-edro* che si ottiene escludendo il vertice A_k.

$$A_iP_{ih} : P_{ih}A_h = a^p{}_{hk} : a^p{}_{ik} ;$$

e scambiando h con i e ponendo nel medesimo tempo l al posto di k, cioè pensando A_iA_h come facente parte dell'$(n-1)$*-edro* che si ottiene escludendo A_l:

$$A_hP_{ih} : P_{ih}A_i = a_{il}{}^p : a_{hl}{}^p .$$

Moltiplicando termine a termine le due proporzioni ottenute si trova:

$$a_{hk} . a_{il} = a_{hl} . a_{ik} .$$

Scambiando ora in quest'ultima l con i e riunendo in una sola la medesima e quella che se ne ottiene col detto scambio:

$$a_{hk} . a_{il} = a_{ki} . a_{hl} = a_{ih} . a_{kl} . \tag{7}$$

Siccome in ogni faccia a due dimensioni è soddisfatto il teorema di Ceva, le $2\binom{n}{4}$ condizioni a cui conducono le (7) sono necessarie e sufficienti per l'esistenza di un punto comune alle n rette di cui sopra.

Il teorema che andiamo ad esporre nel paragrafo che segue ci permetterà di porre sotto una forma molto più semplice le condizioni testè trovate.

§ 4. — Il teorema dei seni.

Detto V il volume dell'*n-edro* e p un coefficiente che dipende unicamente dal numero delle dimensioni dello spazio ambiente, è facile dimostrare la formula:

$$pV = \frac{a_i . a_h . \text{sen}\,(a_i a_h)}{a_{ih}},$$

la quale non è altro che l'estensione di quella che dà il volume del tetraedro in funzione di due facce, dell'angolo da esse compreso e dello spigolo comune. Applicando successivamente questo teorema formiamo il quadro:

$$pV = \frac{a_i a_h \text{ sen } (a_i a_h)}{a_{ih}}, \quad pV = \frac{a_i a_l \text{ sen } (a_i a_l)}{a_{il}}, \quad pV = \frac{a_h a_l \text{ sen } (a_h a_l)}{a_{hl}},$$

$$pV = \frac{a_k a_l \text{ sen } (a_k a_l)}{a_{kl}}, \quad pV = \frac{a_k a_h \text{ sen } (a_k a_h)}{a_{hk}}, \quad pV = \frac{a_i a_k \text{ sen } (a_i a_k)}{a_{ik}}$$

dove, per fare il caso più generale, possiamo supporre diseguali i quattro indici h, i, k, l.

Moltiplicando membro a membro le prime due relazioni, poi le altre due e infine le terze ed uguagliando i prodotti ottenuti, resulta:

$$\frac{a_{ih}a_{kl}}{\text{sen}\,(a_i a_h)\,\text{sen}(a_k a_l)} = \frac{a_{il}a_{hk}}{\text{sen}\,(a_i a_l)\,\text{sen}\,(a_h a_k)} = \frac{a_{hl}a_{ik}}{\text{sen}\,(a_h a_l)\,\text{sen}\,(a_i a_k)}$$

cioè il *teorema dei seni esteso all'n-edro* Queste relazioni sono $\binom{n}{4}$.

In virtù di questo teorema le condizioni (4), (6), (7) del § 3 si possono esprimere più semplicemente così:

Condizione necessaria e sufficiente perchè le altezze di un *n-edro* passino per un medesimo punto è che siano soddisfatte le $\binom{n}{4}$ relazioni:

$$\cos\,(a_i a_h)\cos\,(a_k a_l) = \cos\,(a_i a_l)\cos\,(a_h a_k) = \cos\,(a_h a_l)\cos\,(a_i a_k).$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè le congiungenti i vertici con i punti di contatto delle facce opposte colla ipersfera iscritta passino per un punto è che sian soddisfatte le $\binom{n}{4}$ relazioni:

$$\cos\tfrac{1}{2}\,(a_i a_h)\cos\tfrac{1}{2}\,(a_k a_l) = \cos\tfrac{1}{2}\,(a_i a_l)\cos\tfrac{1}{2}\,(a_h a_k) = \cos\,(a_h a_l)\cos\tfrac{1}{2}\,(a_i a_k).$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè le congiungenti i vertici con i punti K_p delle facce opposte (p diverso da zero) passino per un punto è che siano soddisfatte le $\binom{n}{4}$ relazioni:

$$\text{sen}\,(a_i a_h)\,\text{sen}\,(a_k a_l) = \text{sen}\,(a_i a_l)\,\text{sen}\,a_h a_k) = \text{sen}\,(a_h a_l)\,\text{sen}\,(a_i a_k).$$

§ 5. — **Il teorema di Stewart.**

Ci proponiamo adesso di calcolare la misura della sezione prodotta nell'*n-edro* dall'S_{n-2} passante per l'S_{n-3} opposto allo spigolo A_1A_2 e pel punto P_{12} di A_1A_2 tale che:

$$A_1P_{12} : P_{12}A_2 = r : s.$$

Cominciamo dal porre:

$$\begin{cases} A_1P_{12}A_3A_4 \;\ldots\; A_{n-1} = k_n \\ A_1P_{12}A_3A_4 \ldots A_{n-2}A_n = k_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1P_{12}A_4A_5 \;\ldots\; A_n = k_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_2P_{12}A_3A_4 \;\ldots\; A_{n-1} = l_n \\ A_2P_{12}A_3A_4 \ldots A_{n-2}A_n = l_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_2P_{12}A_4A_5 \;\ldots\; A_n = l_3 \end{cases}$$

e osserviamo che è:

$$\frac{k_3}{l_3} = \frac{k_4}{l_4} = \frac{k_5}{l_5} = \ldots = \frac{k_n}{l_n} = \frac{r}{s}.$$

Poichè si ha:

$$k_3 + l_3 = a_3,\quad k_4 + l_4 = a_4,\ \ldots k_n + l_n = a_n, \tag{8}$$

ricaviamo facilmente:

$$\begin{cases} k_3 = a_3 \dfrac{r}{r+s}, & k_4 = a_4 \dfrac{r}{r+s}, \quad \dots k_n = a_n \dfrac{r}{r+s} \\ l_3 = a_3 \dfrac{s}{r+s}, & l_4 = a_4 \dfrac{s}{r+s}, \quad \dots l_n = a_n \dfrac{s}{r+s}. \end{cases} \tag{9}$$

Aggiungiamo a queste le relazioni:

$$\begin{cases} \cos(k_p k_t) = \cos(a_p a_t) & p \text{ e } t \text{ uguali a } 3, 4, \dots, l_4 \\ \cos(l_p l_t) = \cos(a_p a_t) \end{cases} \tag{10}$$

e la:

$$\sum_3^n a_1 a_h \cos(a_1 a_h) = \sum_3^n a_m^2 - \left\{ a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos(a_1 a_2) \right\}, \tag{11}$$

che si ottiene dalla (T) del § 1 facendovi p eguale a 2, ed avremo gli elementi sufficienti per trovare la formula che cerchiamo.

Ciò posto applichiamo a ciascuna delle facce a_1 e a_2 dei due *n-edri* $A_1P_{12}A_3 \dots A_n$ e $A_2P_{12}A_3 \dots A_n$ il teorema di Carnot.

Avremo, indicando con p_{12} la misura della sezione cercata, e avuto riguardo alle relazioni (10):

$$\begin{cases} a_1^2 = p_{12}^2 + \sum_3^n k_t^2 - 2p_{12} \sum_3^n k_h \cos(p_{12}k_h) - \sum_3^n k_r k_s \cos(a_r a_s) \\ a_2^2 = p_{12}^2 + \sum_3^n l_t^2 - 2p_{12} \sum_3^n l_h \cos(p_{12}l_h) - \sum_3^n l_r l_s \cos(a_r a_s). \end{cases}$$

Sommando queste due relazioni membro a membro, dopo averle moltiplicate rispettivamente per l_3 e k_3, osservando che i termini in p_{12} si distruggono, otteniamo:

$$l_3 a_1^2 + k_3 a_2^2 = (p_{12}^2 + k_3 l_3) a_3 + \sum_3^n \left\{ l_3 k_r^2 + k_3 l_r^2 \right\} - \sum_3^n (k_r k_s l_3 + l_r l_s k_3) \cos(a_r a_s).$$

In questa relazione poniamo per le k e l i loro valori dati dalle (9), avuto riguardo alle (8) e osservando che la quantità racchiusa nell'ultimo sommatorio è, a meno di un fattore, quella che costituisce il primo membro della (11), se ne ottiene, dopo fatte le debite riduzioni, con le quali spariscono i termini in $a_3^2, a_4^2 \dots a_n^2$.

$$(r+s)^2 p_{12}^2 = a_1^2 r^2 + a_2^2 s^2 + 2rs a_1 a_2 \cos(a_1 a_2) \tag{γ}$$

che è l'estensione del teorema di Stewart.

§ 6. — Applicazioni del teorema di Stewart.

In questo paragrafo daremo alcune applicazioni del teorema di Stewart all'*n-edro*.

1°. Supponiamo che sia:

$$\cos(a_1 a_2) = 0. \tag{12}$$

La relazione (γ), essendo omogenea in r ed in s, e potendovisi perciò porre A_1P_{12} in luogo di r e A_2P_{12} in luogo di s diventa:

$$\overline{A_1P_{12}}^2 a_1^2 + \overline{A_2P_{12}}^2 a_2^2 = \overline{A_1A_2}^2 p_{12}^2 \tag{13}$$

Questa, come facilmente si può riconoscere, è la condizione ***necessaria e sufficiente*** perchè l'angolo formato dagli angoli S_{n-2} delle facce a_1 e a_2 sia retto.

2°. Si faccia nella (γ) r uguale ad s: la corrispondente è la sezione mediana m_{12}.

Si ottiene:

$$4m_{12}^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(a_1a_2). \tag{14}$$

Scambiamo in essa circolarmente gl'indici 1, 2, 3... $n-1$ e sommiamo la (14) con tutte quelle ottenute, che saranno in numero di $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1$.

Avremo, tenuto presente il teorema di Carnot applicato alla faccia a_n:

$$4\sum_1^{n-1} m_{ik}^2 = (n-1)\sum_1^{n-1} a_i^2 - a_n^2; \tag{15}$$

formula che ci fa conoscere la somma dei quadrati delle mediane uscenti da un vertice dell'*n-edro*, in funzione delle n facce.

Applicando la (15) successivamente a tutti i vertici dell'*n-edro*, otteniamo sommando membro a membro le relazioni ottenute, il risultato:

$$\sum_1^n m_{ik}^2 = \frac{n}{4}\sum_1^n a_i^2, \tag{16}$$

che può enunciarsi così:

*Il rapporto della somma dei quadrati delle sezioni mediane dell'*n-edro *alla somma dei quadrati delle facce è* $\frac{n}{4}$.

Ne segue:

Nell' S_4 *e negli spazi di dimensione superiore la somma dei quadrati delle sezioni mediane è maggiore della somma dei quadrati delle facce.*

3°. Poniamo $r = a_2$ ed $s = a_1$: la corrispondente sezione è la bisettrice β_{12}.

Segue dalla (γ):

$$\beta_{12} = \frac{2a_1a_2}{a_1+a_2}\cos\left(\frac{a_1a_2}{2}\right) \tag{17}$$

e da questa il teorema:

Se dal punto d'incontro P_{12} *della sezione bisettrice collo spigolo* A_1A_2 *si eleva una normale all'*S_{n-2} *della sezione stessa fino ad incontrare l'*S_{n-2} *della faccia* a_1 *nel punto* M, *l'* $(n-1)$-edro $MA_3A_4 \ldots A_n$ *è medio armonico fra le facce dell'*n-edro *che comprendono la sezione bisettrice.*

4°. Facciamo nella (γ) una prima volta:

$$r = a_2^h, \qquad s = a_1^h$$

e una seconda:

$$r = a_1^{h-2}, \qquad s = a_2^{h-2}.$$

Il rapporto delle corrispondenti sezioni sarà dato da:

$$a_1 a_2 \frac{a_1^{h-2} + a_2^{h-2}}{a_1^h + a_2^h}.$$

Supponiamo in particolare h eguale a 2, con che la prima sezione diviene la simediana e la seconda la mediana. Otterremo:

$$\frac{s_{12}}{m_{12}} = \frac{2a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2}.$$

5°. Le (1) del § 1 si possono considerare come n equazioni lineari ed omogenee in $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$, 1. Per la loro compatibilità si richiede dunque che sia nullo il determinante dei coefficienti.

La condizione:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & \cos(a_1 a_2) & \cos(a_1 a_3) & \dots \cos(a_1 a_n) \\ \cos(a_2 a_1) & -1 & \cos(a_2 a_3) & \dots \cos(a_2 a_n) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots \\ \cos(a_n a_1) & \cos(a_n a_2) & \cos(a_n a_3) & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad (18)$$

che per n uguale a *tre* altro non ci esprime se non che la somma degli angoli di un triangolo è uguale a due retti, ci fornisce nel caso generale una relazione fra i coseni dei diedri dell'*n-edro*. Ma essa ci permette anche di trovare innumerevoli relazioni fra le sezioni dei diversi ordini, bastando a questo scopo rimpiazzare i coseni che in essa figurano colle espressioni ricavate dal teorema di Stewart.

§ 7. — Estensione del concetto di punto notevole.

Rappresentiamo con $x_i^{(1)}\, x_i^{(2)} \dots x_i^{(n)}$ le coordinate dei vertici $A_1 A_2 \dots A_n$, e con $m_1 m_2 \dots m_n$, n quantità corrispondenti ai vertici medesimi.

Preso sulla congiungente A_1A_2 un punto P_{12} tale che le sue distanze da A_1A_2 siano nel rapporto di m_1 ad m_2 e poi sulla congiungente $P_{12}A_3$ un secondo punto tale che le sue distanze da P_{12} e da A_3 siano nel rapporto di $m_1 + m_2$ ad m_3 e così via, perverremo ad un punto detto *centro* delle distanze, proporzionali alle quantità $m_1, m_2 \dots m_n$, le cui coordinate sono:

$$\left\{\begin{array}{l} \xi_1 = \dfrac{m_1 x_1^{(1)} + m_2 x_1^{(2)} + m_3 x_1^{(3)} + \dots + m_n x_1^{(n)}}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} \\ \xi_2 = \dfrac{m_1 x_2^{(1)} + m_2 x_2^{(2)} + m_3 x_2^{(3)} + \dots + m_n x_2^{(n)}}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \xi_n = \dfrac{m_1 x_n^{(1)} + m_2 x_n^{(2)} + m_3 x_n^{(3)} + \dots + m_n x_n^{(n)}}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n}. \end{array}\right. \quad (19)$$

È evidente che il punto K_p da noi studiato nel § 2 rientra in questa categoria di punti, potendosi ottenere facendo $m_i = a_i^p$. Ma possiamo dare alle formule (19) tutta la generalità di cui sono suscettibili supponendo che alcune delle m_i siano negative. In tal caso basterà che conveniamo che il punto che divide un segmento nel rapporto di m ad n sia interno al segmento stesso od esterno secondo che m ed n hanno segno uguale o contrario. È chiaro allora che il numero totale dei punti corrispondenti alle ipotesi che nessuno, uno, due, ecc., coefficienti siano negativi, sarà dato per n dispari, da

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{\frac{n-1}{2}},$$

e per n pari da:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\tfrac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}};$$

e in conseguenza, in virtù di una nota formula di analisi combinatoria, sì nell'uno che nell'altro caso, da 2^{n-1}.

I punti a cui perveniamo sono dunque 2^{n-1}, *al massimo.* E diciamo al massimo perchè potrà darsi che si riducano a un numero minore, ciò avvenendo quando si annulli la somma che comparisce nel denominatore delle (19). In tal caso i corrispondenti punti si allontanano a distanza infinita. Abbiamo però allora la seguente limitazione:

In uno spazio di dimensione dispari il minimo numero di punti a distanza finita, centri delle distanze proporzionali a date quantità $m_1, m_2, m_3 \ldots m_n$ *corrispondenti ai vertici dell'*n-edro *e che si ottengono preponendo ad esse quantità il segno positivo o negativo in tutti i modi possibili, è* $2^{n-1}-\frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}$.

Nel caso poi di $m_i = a_i^p$ si aggiunga che mentre quel numero è raggiungibile per l'*n-edro regolare* [1] dello spazio a numero *dispari* di dimensioni, sono invece tutti a distanza finita i 2^{n-1} punti relativi all'*n-edro regolare* dello spazio a numero *pari* di dimensioni.

È particolarmente interessante il caso di p eguale ad *uno.* In tal caso esisteranno non più di 2^{n-1} e non meno di $2^{n-1}-\frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}$ punti equidistanti dagli S_{n-2} delle facce dell'*n-edro.* Uno di essi è interno all'*n-edro* stesso ed è il centro dell'ipersfera iscritta, il cui raggio indicheremo con r: in quanto agli altri, considereremo qui soltanto i centri delle ipersfere che toccano una sola faccia e i prolungamenti delle altre e ne indicheremo i raggi con $r_1, r_2, \ldots r_n$.

---

[1] Se con α_k indichiamo l'angolo del *k-edro* regolare di S_{k-1} dalle (1) del § 1 si ricava subito che $\cos\alpha_k = \frac{1}{k-1}$.

Se allora indichiamo con V la misura dell'*n-edro*, troveremo facilmente le relazioni:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \frac{(n-1)V}{r}$$

$$-a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \frac{(n-1)V}{r_1}$$

$$a_1 - a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \frac{(n-1)V}{r_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots - a_n = \frac{(n-1)V}{r_n}.$$

Considerando queste come formanti un sistema di $n+1$ equazioni lineari ed omogenee in $a_1, a_2, \ldots a_n, (1-n)V$, si richiede per la loro coesistenza l'annullarsi del determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 & \frac{1}{r} \\ -1 & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 & \frac{1}{r_1} \\ 1 & -1 & 1 & \ldots\ldots & 1 & \frac{1}{r_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots & -1 & \frac{1}{r_n} \end{vmatrix}.$$

Moltiplicando la prima linea per $n-2$ e sottraendovi la somma delle altre, con che i primi n termini della prima linea stessa si riducono a zero, e osservando che il coefficiente dell' $(n+1)$-esimo termine, nello sviluppo, è differente da zero, si trae:

$$\frac{n-2}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_n},$$

estensione di note formule del piano e dello spazio.

§ 8. — Estensione all'*n*-edro della formula della distanza.

Indichiamo con k la somma dei prodotti dei quadrati delle distanze di un punto P di S_{n-1} dai vertici dell'*n-edro* per le quantità $m_1, m_2 \ldots m_n$ ad essi corrispondenti, poniamo cioè:

$$k = \Sigma_h m_h \overline{PA_h}^2.$$

Tenendo presenti le notazioni del § 7 e indicando con $X_1, X_2, \ldots X_n$ le coordinate di P rispetto a un sistema di assi ortogonali, avremo anche

$$k = \Sigma_h m_h \, . \, \Sigma_r (X_r - x_r^{(h)})^2.$$

Supposto che sia $\Sigma_i m_i$ diverso da zero, [1] dividiamo ambo i membri della precedente per $\Sigma_i m_i$. Otterremo:

$$\frac{k}{\Sigma_i m_i} = \frac{\Sigma_h m_h \Sigma_r (X_r - x_r^{(h)})^2}{\Sigma_i m_i} = \Sigma_r X_r^2 + \frac{\Sigma_h m_h \Sigma_r (x_r^{(h)})^2}{\Sigma_i m_i} - 2\frac{\Sigma_r X_r \Sigma_h m_h x_r^{(h)}}{\Sigma_i m_i}.$$

Aggiungendo e togliendo al secondo membro l'espressione:

$$\frac{2\Sigma_{hk} m_h m_k \Sigma_r x_r^{(h)} x_r^{(k)} + \Sigma_h m_h^2 \Sigma_r (x_r^{(h)})^2}{(\Sigma_i m_i)^2},$$

e osservando che è:

$$\Sigma_r X_r^2 + \frac{2\Sigma_{hk} m_h m_k \Sigma_r x_r^{(h)} x_r^{(k)} + \Sigma_h m_h^2 \Sigma_r (x_r^{(h)})^2}{(\Sigma m_i)^2} - 2\frac{\Sigma_r X_r \,.\, \Sigma_h m_h x_r^{(h)}}{\Sigma_i m_i} =$$
$$= \Sigma_r \left\{ X_r - \frac{\Sigma_h m_h x_r^{(h)}}{\Sigma_i m_i} \right\}^2,$$

potremo scrivere anche:

$$\frac{k}{\Sigma_i m_i} = \Sigma_r \left\{ X_r - \frac{\Sigma_h m_h x_r^{(h)}}{\Sigma_i m_i} \right\}^2 +$$
$$+ \frac{\Sigma_h m_h \Sigma_r (x_r^{(h)})^2}{\Sigma_i m_i} - \frac{2\Sigma_{hk} m_h m_k \Sigma_r x_r^{(h)} x_r^{(k)} + \Sigma_h m_h^2 \Sigma_r (x_r^{(h)})^2}{(\Sigma_i m_i)^2}.$$

Ora si ha:

$$\frac{\Sigma_h m_h \Sigma (x_r^{(h)})^2}{\Sigma_i m_i} - \frac{2\Sigma_{hk} m_h m_k \Sigma x_r^{(h)} x_r^{(k)} + \Sigma_h m_h^2 \Sigma_r (x_r^{(h)})^2}{(\Sigma_i m_i)^2} =$$
$$= \frac{\Sigma_h m_h^2 \Sigma (x_r^{(h)})^2 + \Sigma_{hk} m_h m_k \Sigma_r \left\{ (x_r^{(h)})^2 + (x_r^{(k)})^2 \right\}}{(\Sigma_i m_i)^2}$$

e in conseguenza:

$$\frac{k}{\Sigma_i m_i} = \Sigma_r \left\{ X_r - \frac{\Sigma_h m_h x_r^{(h)}}{\Sigma_i m_i} \right\}^2 + \frac{\Sigma_{hk} m_h m_k \Sigma_r (x_r^{(h)} - x_r^{(k)})^2}{(\Sigma m_i)^2}.$$

Il primo sommatorio del secondo membro non è altro che il quadrato della distanza di P dal centro D delle distanze proporzionali a $m_1, m_2 \ldots m_n$, e il secondo può anche scriversi:

$$\frac{\Sigma_{hk} m_h m_k \overline{A_h A_k}^2}{(\Sigma_i m_i)^2}.$$

Ne segue la formula domandata:

$$\overline{PD}^2 = \frac{\Sigma_h m_h \overline{PA_h}^2}{\Sigma_i m_i} - \frac{\Sigma_{hk} m_h m_k \overline{A_h A_k}^2}{(\Sigma_i m_i)^2}. \qquad (20)$$

Se D coincide con k_p, allora è $m_i = a_i^p$ e si trova:

$$\overline{PK_p}^2 = \frac{\Sigma_h a_h^p \overline{PA_h}^2}{\Sigma_i a_i^p} - \frac{\Sigma_{hk} a_h^p a_k^p \overline{A_h A_k}^2}{(\Sigma a_i^p)^2}. \qquad (21)$$

---

[1] Ciò equivale a supporre che il centro delle distanze proporzionali alle m sia a distanza finita.

Ponendo:

$$E_p = \frac{\Sigma_{hk} a_h{}^p a_k{}^p \overline{A_h A_k}^2}{(\Sigma_l a_l{}^p)^2},$$

si può scrivere la precedente in modo più semplice:

$$\overline{PK_p}^2 = \frac{\Sigma_h a_h{}^p \overline{PA_h}^2}{\Sigma_l a_l{}^p} - E_p.$$

Da queste segue che quanto più P è vicino a K_p, tanto meno $\frac{\Sigma_h a_h{}^p \overline{PA_h}^2}{\Sigma_l a_l{}^p}$ differisce da E_p. Il minimo valore di detto sommatorio si ha dunque quando P coincide con K_p, ed è E_p. Notiamo inoltre che i punti P pei quali $\Sigma_h a_h{}^p \overline{PA_h}^2$ è costante, sono sopra un'ipersfera di centro K_p.

Posizioni speciali di P. Se P coincide col centro O dell'ipersfera circoscritta, abbiamo:

$$\overline{OK_p}^2 = R^2 - E_p$$

dalla quale segue che E_p è la potenza dei punti di detta ipersfera rispetto a quella di raggio OK_p.

Se facciamo coincidere P con K_r troviamo:
per *r* diverso da *p*:

$$\overline{K_r K_p}^2 = \frac{\Sigma_h a_h{}^p \overline{K_r A_h}^2}{\Sigma_l a_l{}^p} - E_p$$

per *r* uguale a *p*:

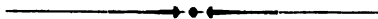
$$\Sigma a_h{}^p \overline{K_p A_h}^2 = \frac{\Sigma_{hk} a_h{}^p a_k{}^p \overline{A_h A_k}^2}{\Sigma_l a_l{}^p}.$$

Aggiungiamo da ultimo i due teoremi la cui dimostrazione lasciamo allo studioso.

1°. *La congiungente un vertice col baricentro della faccia opposta viene divisa dal baricentro dell'*n-edro *in due parti tali che quella che va al vertice è* (n — 1) *volte quella che va alla base. (Estensione del teorema di Commandino.)*

2°. *In un* n-edro (n — 1) *rettangolo in* A_1 *la porzione di congiungente* A_1 *col punto* K_2 *di Lemoine compresa entro l'*n-edro *è divisa per metà da* K_2.

ENRICO PICCIOLI

Empoli.

ESTENSIONE DI ALCUNI TEOREMI SUI GRUPPI DI SOSTITUZIONI

---

1. Un gruppo di sostituzioni G, transitivo, d'ordine n e classe $n-1$ possiede $n-1$ operazioni che ne spostano gli n elementi, e lo studio dei casi nei quali queste formano un gruppo ha dato origine a varie ed interessanti ricerche. Maillet (*Recherches sur les substitutions*, Parigi, 1892) e Burnside (*Theory of groups of a finite order*, Cambridge, 1897, pag. 141-147) ad esempio, hanno già da tempo stabilito certe limitazioni all'ordine del gruppo quando ne sia noto il grado, ed il secondo di questi matematici, che ha poi ripresa la questione considerandola sotto un nuovo punto di vista, ha potuto concludere che, solo quando n è maggiore del quadrato del più piccolo numero dispari che è ordine di un gruppo semplice, G possiede necessariamente un sottogruppo transitivo invariante formato da quelle n sostituzioni e del quale n è ordine e grado. Ha così potuto dedurre che se un gruppo è d'ordine pq, essendo p e q numeri primi fra di loro, e contiene p sottogruppi d'ordine q, coniugati e risolubili, non aventi, ad eccezione dell'identità, nessuna operazione comune, allora esso possiede un sottogruppo invariante d'ordine p. Inoltre, che se G ammette un gruppo d'isomorfismi, che ha per ordine la potenza d'un numero primo e le di cui operazioni non lasciano altro elemento di G inalterato se non quello identico, allora il gruppo degli isomorfismi è ciclico. Queste questioni, già per loro stesse interessanti, si collegano ad altre che riguardano l'esistenza dei gruppi semplici d'ordine dispari. È noto che l'ordine d'un gruppo semplice non può esser rappresentato da un numero dispari se questo non può scomporsi in più di cinque fattori primi, e se non ha nessuna delle forme p^α, $p^\alpha q$, $p^\alpha q^2$, $p^\alpha q^\beta, \ldots, r^\gamma$, nell'ultima delle quali gli indici devono essere i numeri 1 e 2; ma fino ad ora le ricerche su tali gruppi sono rimaste fra limiti molto ristretti, ed è ancora Burnside che vi ha dedicate varie note e che nell'opera già citata (pag. 371-379) ha potuto dimostrare come l'ordine d'un tal gruppo non può essere un numero minore di 9000.

2. Se un gruppo semplice G d'ordine dispari vien rappresentato quale gruppo di sostituzioni sul minor numero possibile di elementi, i sottogruppi intransitivi, nonchè i costituenti transitivi, sono semplicemente transitivi e d'ordine dispari: inoltre, il massimo sottogruppo, di grado $n-1$, è for-

mato di un numero pari di costituenti semplicemente transitivi d'ordine dispari e Jordan ha mostrato a pag. 28 del suo *Traité des substitutions*, che l'ordine di ognuno di tali costituenti contiene tutti i fattori che concorrono a formare l'ordine del sottogruppo massimo. Il grado di G non può essere un numero primo della forma 2^m+1, giacchè allora gli operatori di quest'ordine verrebbero trasformati in loro stessi da sostituzioni d'ordine 2, e ciò pel teorema che stabilisce che ogni operatore d'ordine p (p numero primo) d'un gruppo di grado p deve venir trasformato in sè stesso da un numero di operatori del gruppo che è maggiore di p, sempre che l'ordine del gruppo sia un numero composto. Che se poi uno dei costituenti transitivi del sottogruppo massimo avesse per grado un numero primo della forma 2^m+1, l'ordine di questo sottogruppo sarebbe p. In conseguenza G possederebbe $n-1$ sostituzioni di grado n e potrebbe venir rappresentato quale gruppo transitivo di grado minore di $n-1$, per cui non sarebbe più quel gruppo di sostituzioni sul minor numero di elementi al quale abbiamo accennato. Possiamo così ritenere che in G non può essere nessun costituente transitivo il cui grado sia rappresentato da uno dei numeri 3, 5, 17,... cioè, in altre parole, che il grado d'un gruppo semplice d'ordine dispari è sempre minore di 50. (1)

Se dunque i gruppi primitivi d'ordine dispari sono semplicemente transitivi, lo studio dei gruppi primitivi semplicemente transitivi potrà contribuire alla conoscenza dei gruppi semplici d'ordine dispari, come già ha mostrato il prof. Rietz, (2) ed è sotto questo aspetto che si può con profitto affrontare la questione, estendendo ai gruppi semplici d'ordine dispari alcuni dei teoremi dati pei gruppi semplicemente transitivi da Jordan, (3) da Burnside, (4) da Miller, (5) ecc.

3. Se p e q sono numeri primi differenti e della forma 2^m+1, nessun gruppo primitivo di grado pq può nel suo ordine contenere p e q contemporaneamente.

Sia $p^u q^v$ l'ordine di uno di tali gruppi; saranno $p^{u-1}q^{v-1}$ e $pq-1$ rispettivamente l'ordine e il grado del sottogruppo massimo G_s che non sposta un dato elemento a_s del gruppo. Per $p^2>q$ è $p^2>pq-1$, e nessuno dei costituenti transitivi potrà essere di grado p^α $(\alpha>1)$, nè tutti potranno essere di grado p, non essendo questo numero fattore di $pq-1$. Per ragione analoga non potranno neppure essere di grado q. Supponiamo dunque che siano in parte di grado p ed in parte di grado eguale ad una potenza di q. Ma l'ordine d'un costituente transitivo di grado p è p, numero che è per ipotesi primo con q, nel mentre che, come è noto, ogni numero primo che divide l'ordine d'un costituente transitivo di G deve

(1) Miller, *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. XXXIII, pag. 7.
(2) *On primitive Groups of odd order*, pag. 3 e segg.
(3) *Traité des Substitutions*, pag. 281-284. Parigi, 1870.
(4) *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. XXVIII, pag. 533-542.
(5) *Theory of Groups of a finite order*. Cambridge, 1897, pag. 162-185.

pur dividere l'ordine di tutti questi costituenti: [1] dunque q non può essere grado di nessuno di quei costituenti.

4. Il sottogruppo massimo G_s di G sia d'ordine dispari, ammetta un costituente transitivo T di grado pq e possegga q sistemi d'imprimitività. I numeri p e q siano ancora quali nel numero precedente. È ben noto che i q sistemi d'imprimitività sono permutabili secondo il gruppo ciclico d'ordine q. All'identità di T corrisponde in G_s un sottogruppo invariante H_s di grado $n - \alpha$ ($\alpha < pq + 1$); indichiamo con G_r il coniugato di G_s che non sposta un elemento di T, e con R_s il sottogruppo invariante di G_s che corrisponde a quello principale in T. In G_r il sottogruppo H_s è elemento di una serie di pq coniugati che da G_r sono trasformati per mezzo d'un costituente transitivo T_1 d'ordine $p^u q^v$. Ma T_1 è imprimitivo, e se p e q sono quali li abbiamo supposti nessun gruppo imprimitivo esiste che essendo di grado pq abbia il suo ordine divisibile sia per p^2 che per q^2 se tale ordine è un numero dispari, ed inoltre, come lascia invariato un elemento, altri pure ne lascerebbe, così H_s è in G_s trasformato in sè stesso da una parte dei suoi coniugati. Sia H_{s_1} uno di essi e tale che $H_{s_1}^{-1} H_s H_{s_1} = H_s$; esso è contenuto tanto in G_s che in G_r e dunque anche in R_s, e se questo possiede operatori d'ordine q, tali operatori apparterranno pure ad H_s. Quindi H_s ed H_{s_1} posseggono le stesse sostituzioni d'ordine q. Ma il primo è invariante in G_s ed il secondo in G_{s_1}; dunque le sostituzioni d'ordine q di H_s generano un gruppo invariante sia in G_s che in G_{s_1}, il che non può essere, giacchè, per ipotesi, G_s è il sottogruppo massimo.

5. Sia ora p^a la più alta potenza del numero primo p che è fattore dell'ordine n di G e sia H un sottogruppo d'ordine p^a: indichiamo con G_1 quel sottogruppo massimo che contiene H invariantemente e supponiamo che tutte le operazioni di G_1 siano permutabili con quelle di H talchè questo sia abeliano. Se rappresentiamo G quale gruppo di sostituzioni sugli n simboli

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots, a_n$$

e indichiamo con H_1 un qualunque sottogruppo d'ordine n ($n = mq$), tutti gli elementi a saranno regolarmente permutati in q serie di n elementi ciascuna dalle operazioni di H_1. Se

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots, a_m$$

è una di queste serie e facciamo

$$\varphi_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m,$$

sarà φ_1 funzione lineare delle a, invariante per tutte le operazioni di G

[1] Cfr. JORDAN, *op. cit.* pag. 284.

contenute in H_1, ma non per nessun'altra, e che quindi assumerà q valori differenti per tutte le operazioni di G. Indichiamoli coi simboli

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \varphi_3, \ldots, \varphi_q.$$

Ciascuno di questi valori è somma di m differenti a ciascuno dei quali non può esser compreso in più di uno dei valori di φ, che sono quindi permutati dalle operazioni di G. Questo può così venir rappresentato quale gruppo di permutazioni sulle φ, ed il gruppo delle a è in isomorfismo meriedrico od oloedrico col gruppo delle φ a seconda che H_1 contiene o no un sottogruppo invariante di G. Il gruppo delle φ può rappresentarsi colla notazione (1)

$$\varphi'_i = \varphi_{i'}^{(k)} \qquad (i, i' = 1, 2, \ldots, q;\; k = 1, 2, \ldots, n);$$

designamolo con G'. Se G è in isomorfismo meriedrico con G', sarà per due o più valori di k,

$$\varphi_{i'}^{(k)} = \varphi_i$$

per ogni valore di i. In ogni caso per ciascun k i q simboli

$$\varphi_1^{(k)}, \quad \varphi_2^{(k)}, \quad \varphi_3^{(k)}, \ldots, \varphi_q^{(k)}.$$

rappresenteranno i φ presi in diverso ordine.

Ciò premesso, sia S un'operazione di H, d'ordine p^β, e tale che non possa esservi altra operazione S' in H per la quale la relazione $S = S'^p$ possa ancora sussistere. Il gruppo H è isomorfo al gruppo ciclico d'ordine p^β, ed è possibile determinare un suo invariante relativo j che da S sia trasformato in ρj, essendo ρ radice primitiva p^β (esima) dell'unità, ma che rimane invariato per tutte le operazioni di H rispetto alle quali esso è isomorfo ad (S). (2)

Se S fa parte di $(1 + kp)$ sottogruppi d'ordine p^α e se in G' ogni sottogruppo d'ordine p^α lascia h elementi invariati, l'operazione che in G' corrisponde ad S lascerà $(1 + kp)\,h$ simboli invariati che dovranno essere transitivamente permutati per mezzo del più ampio sottogruppo K nel quale S è invariante. (3) Deduciamo così che se p è il maggior numero primo e p^α la sua massima potenza che dividono l'ordine $n (= mp^\alpha)$ di G,

1° G è prodotto diretto di gruppi d'ordine p^α ed m rispettivamente se ogni operazione di un suo sottogruppo d'ordine p^α è sua operazione invariante:

2° G possiede un sottogruppo invariante d'indice p^α se i sottogruppi che hanno questo numero per ordine sono abeliani.

Ciò si estende facilmente al caso nel quale l'ordine $n = mp^\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$ del gruppo G è un numero dispari e p è minore di ciascuno dei fattori

---

(1) DYCK, *Mathematische Annalen*, vol. XXII, pag. 90-92.

(2) BURNSIDE, " On some properties of Groups of odd order " *Proc. of the London Math. Soc.* vol. XXXIII.

(3) Si può notare infatti che gli h simboli lasciati invariati da H sono permutati transitivamente da G_1 (compreso in K) che contiene operazioni che permutano H con ciascuno degli altri sottogruppi d'ordine p^α nei quali è contenuta l'operazione S.

primi di m; il G possiede allora un sottogruppo invariante d'ordine m. Se per $\alpha = 3$ i gruppi d'ordine p^3 sono abeliani e non si hanno fra m e (p^2+p+1) dei fattori comuni, G possiede un sottogruppo invariante d'ordine m, giacchè i soli isomorfismi il cui ordine sia maggiore di p che possono essere ammessi da un gruppo abeliano d'ordine p^3 sono quelli che hanno per ordini i fattori di (p^2+p+1). Ma se non lo sono, G possiede un sottogruppo invariante d'indice p^3. Infine, se l'ordine, dispari, di G ha un fattore primo q non ripetuto e della forma 2^n+1, il gruppo G possiede un sottogruppo invariante d'indice q.

6. Facendo seguito alla conseguenza prima del numero precedente mostreremo che, o il sottogruppo H è regolare, o che esso risulta da isomorfismo oloedrico stabilito fra gruppi regolari d'ordine p^α solo quando è $n-1$ il suo grado, e che G contiene un sottogruppo intransitivo di grado n avente un costituente transitivo di grado $1+kp$ $(k>0)$ e d'ordine mp.

Il prof. Burnside [1] ha già dimostrato che quel sottogruppo di G che ne contiene tutte le sostituzioni trasformanti H in sè stesso permuta transitivamente i η elementi che non entrano in H. Per $\eta = 1$ dovranno in H essere contenuti [2] alcuni dei sottogruppi

$$G_1, \quad G_2, \quad G_3, \ldots, G_n$$

che lasciano invariato un elemento di G, essendo il loro grado primo con n. Sia H_1 un sottogruppo d'ordine p^β comune a due qualunque di quegli n sottogruppi e nessun sottogruppo d'ordine p^γ $(\gamma > \beta)$ sia comune a due qualunque di essi. Per $\beta > 0$ [3] il sottogruppo H_1 deve essere contenuto in sottogruppi K_1, K_2 d'ordine p^α; e siccome in gruppi di quest'ordine ogni sottogruppo H_1 è trasformato in sè stesso da quelle operazioni del gruppo che in esso stesso non sono contenute, così H_1 è invariante in un sottogruppo H_2 di grado $n-1$, contenuto in K_1. Analoga cosa si dirà per K_2; il gruppo H_1 è invariante in un sottogruppo H_3 di grado $n-1$, per cui è invariante in $[H_2, H_3]$ di grado n; e siccome è $n \equiv 1$, mod. p, così deduciamo che se diciamo q il numero di elementi di G non contenuti in H_1, è pure $q \equiv 1$, mod. p. Di più, per essere tanto H_2 che H_3 di grado $n-1$, segue che $[H_2, H_3]$ possiede un costituente transitivo di grado $1+kp$ $(k>0)$ formato da quegli elementi che non sono contenuti in H_1 ed il di cui ordine è un multiplo di p.

Deduciamo da ciò che, chiamando ancora p^α la maggior potenza del numero primo p che divide l'ordine del sottogruppo G_s di G che non sposta un dato elemento a_s, se tutti i gradi dei costituenti transitivi di G_s sono multipli di p^β, ma uno almeno non è multiplo di $p^{\beta+1}$, allora o è $\alpha = \beta$, o in G è un sottogruppo di grado n che possiede un costituente transitivo di grado $1+kp$ $(k>0)$ ed il cui ordine è multiplo di p.

(1) *Op. cit.* pag. 202.
(2) BURNSIDE. *Op. cit.* pag. 204.
(3) Sarebbe superfluo considerare il caso nel quale è $\beta = 0$ giacchè allora H risulta da isomorfismo oloedrico stabilito fra gruppi regolari.

7. L'ordine n del gruppo G, primitivo, sia ancora un numero composto. È noto [1] che se in G_s sono r_a sostituzioni di grado $(g - \eta_a)$, il numero totale di sostituzioni di G aventi per grado un numero minore di g è espresso dalla somma

$$\frac{1}{\eta_1} g r_1 + \frac{1}{\eta_2} g r_2 + \frac{1}{\eta_3} g r_3 + \ldots + \frac{1}{\eta_u} g r_u ,$$

avendo indicato con u il numero di gradi differenti delle sostituzioni di G_s. La somma di tutti questi u termini $\frac{r}{\eta}$ può considerarsi equivalente ad una somma di $\frac{n}{g} = \mathrm{N}$, addendi della forma $\frac{1}{\eta}$, giacchè è

$$r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_u = \frac{n}{g} ,$$

per cui possiamo scrivere al posto di quella somma l'espressione

$$g \Sigma \frac{1}{\eta_a} ,$$

intendendo sempre il sommatorio esteso da $a = 1$ ad $a = \mathrm{N}$. Ma è pur noto [2] che il numero medio di elementi delle sostituzioni d'un gruppo intransitivo è dato dall'eccesso del grado sul numero di sistemi d'intransitività, per cui se consideriamo G_s, nel quale supponiamo v sistemi di intransitività, come se, essendo transitivo fosse dotato di un sistema di intransitività, il valore medio di η_a sarà $v + 1$, cioè sarà

$$v + 1 = \frac{1}{\mathrm{N}} \Sigma \eta_a .$$

Ma la media aritmetica di qualsiasi numero di quantità positive è sempre maggiore della loro media geometrica, e siccome i η_a dell'ultimo sommatorio non possono essere tutti eguali avendo esclusa l'identità dalle sostituzioni di G_s, così possiamo scivere

$$\frac{1}{\mathrm{N}} \Sigma \eta_a > (\eta_1 \eta_2 \eta_3 \ldots \eta_{\mathrm{N}})^{1/\mathrm{N}} ,$$

$$\frac{1}{\mathrm{N}} \Sigma \frac{1}{\eta_a} > \left(\frac{1}{\eta_1 \eta_2 \eta_3 \ldots \eta_{\mathrm{N}}} \right)^{1/\mathrm{N}} ,$$

dalle quali diseguaglianze siamo facilmente condotti all'altra

$$\mathrm{N}^2 / \Sigma \eta_a < \Sigma \frac{1}{\eta_a} .$$

Combinando quest'espressione con quella che dà il valore di $v + 1$ otteniamo,

$$\frac{n}{g\,(v+1)} < \Sigma \frac{1}{\eta_a} , \qquad \text{cioè} \qquad \frac{n}{v+1} < g\, \Sigma \frac{1}{\eta_a} ,$$

[1] JORDAN, "Recherches sur les substitutions", *Journal de Math. de Liouville*, vol. XVII, pag. 353.

[2] JORDAN, *Comptes-Rendus de l'Ac. des Sciences de Paris*, vol. 74, pag. 977; FROBENIUS. *Crelle*, vol. 101, pag. 288.

la quale mostra che un gruppo primitivo G di grado g e che ha un numero composto n per ordine, contiene più di $\frac{n}{v+1}$ sostituzioni di grado minore di g, essendo v il numero di sistemi d'intransitività del sottogruppo che non sposta un dato elemento.

Per $v=1$, nel qual caso il gruppo è più volte transitivo, le sostituzioni di grado minore di g sono più della metà.

In particolare un gruppo di grado kp e d'ordine mp (p numero primo, m primo con p e con $p-1$) contiene m operatori il cui ordine è multiplo di m; tutte le sostituzioni di grado inferiore a kp hanno per ordine un numero primo con p, per cui, per quanto è detto più su, è

$$v > \frac{mp}{v+1}, \qquad \text{cioè} \qquad v > p-1;$$

e siccome per essere mp dispari, v è pari, è pure $v \geqq p+1$, così il sottogruppo G_s ha almeno $p+1$ costituenti transitivi.

8. Gli elementi di un costituente transitivo T di grado t del gruppo G siano

$$a_{s,1}\,, \quad a_{s,2}\,, \quad a_{s,3} \ldots, a_{s,t}\,;$$

la funzione quadratica

$$f = \sum_{s=1}^{s=g} a_s\,(a_{s,1} + a_{s,2} + a_{s,3} + \ldots + a_{s,t}),$$

rimane invariante per tutte le sostituzioni di G ed è inoltre, a meno di un possibile fattore numerico, [1] il minor invariante quadratico che contiene $a_s a_{s,1}$. Se l'ordine di G è dispari, i costituenti transitivi di G_s di egual grado sono a coppie: G_s contiene un sottogruppo invariante H_s di grado $(g-\alpha)$, e dei g coniugati fra i quali esso è compreso ne entrano $(\alpha-1)$ in G_s. Questi $(\alpha-1)$ sottogruppi H_s, che designeremo con

$$H_{s,1}\,, \quad H_{s,2}\,, \quad H_{s,3} \ldots, H_{s,\alpha-1}\,, \qquad (a)$$

generano un gruppo di grado $(g-1)$. Ora, « se G_s possiede [2] v sistemi d'intransitività ed è H_s il sottogruppo invariante di G_s corrispondente all'identità di uno dei costituenti transitivi, nel mentre G_s trasforma i sottogruppi (a) secondo un costituente che possiede v_1 sistemi d'intransitività, allora H_s possiede più di $\frac{v}{v_1}$ sistemi d'intransitività, facendo eccezione pel caso nel quale è $v_1=1$, giacchè allora ne possiede v almeno ». Questa legge si verifica facilmente tenendo conto di quanto abbiamo già detto, giacchè deduciamo che se H_s avesse meno di $\frac{v}{v_1}$ sistemi d'intran-

(1) RIETZ, *op. cit.* pag. 7.
(2) MILLER, *Proc. of the London Math. Soc.*, vol. XXVIII, pag. 535.

sitività, le v_1 serie coniugate in G_s nelle quali i sottogruppi (a) sono suddivisi conterebbero il massimo numero di elementi

$$\left(\frac{v}{v_1}-1\right)v_1+1=v-(v_1-1)$$

dei v sistemi d'intransitività di G_s, dovendo ognuno di quei sottogruppi contenere almeno un ciclo di T, per cui questi ultimi non potrebbero appartenere ad un gruppo di grado $(g-1)$ eccetto che per $v_1=1$ (cfr. numero precedente).

Siano ora T e T' due costituenti transitivi corrispondenti, in G e G_s rispettivamente, ma fra loro differenti. Un certo numero di quei $(\alpha-1)$ sottogruppi vengono trasformati per mezzo di T' quando H_s corrisponde all'identità di T. (1) Notiamo innanzi tutto che se indichiamo con

$$a_{x,1}\,,\quad a_{x,2}\quad a_{x,3}\,,\ldots,a_{x,t}$$

gli elementi di T', possiamo scrivere, come già abbiamo fatto per T,

$$f=\sum_{x=1}^{x=g}(a_{x,1}+a_{x,2}+a_{x,3}+\ldots+a_{x,t})\,a_x\,.$$

Formiamo il coniugato $G_{s,a}$ di G_s lasciando invariato un elemento di T: dai due differenti valori di f rileviamo che in $G_{s,a}$ l'elemento a_s entra nel gruppo trasformato di T', cioè in $R^{-1}TR$, essendo R tale che $R^{-1}G_sR=G_{s,a}$; ma H_s è trasformato per mezzo di G nel modo stesso nel quale è trasformato a_s, e da ciò il teorema.

Siano ora due solamente i costituenti transitivi, ed all'identità in uno di essi, in T', ad esempio, corrisponda un sottogruppo invariante H_s di G_s. I sottogruppi

$$H_{s,1}\quad H_{s,2}\quad H_{s,3}\,,\ldots,H_{s,h}\,,\qquad [h=\tfrac{1}{2}(g-1)], \tag{b}$$

sono i trasformati da G_s per mezzo degli elementi di H_s, (2) per cui, per due dei g sottogruppi

$$H_1\,,\quad H_2\,,\quad H_3\,,\ldots,H_g\,,$$

coniugati in G sussiste l'una o l'altra, ma non entrambe contemporaneamente, delle relazioni

$$H_\beta^{-1}H_\alpha H_\beta=H_\alpha\,,\qquad \text{ed}\qquad H_\alpha^{-1}H_\beta H_\alpha=H_\beta\,. \tag{c}$$

Sia v il numero di elementi comuni ad H_α e H_ν: è pure v il numero di elementi comuni a due qualunque dei sottogruppi (b). Siano

$$a_1\,,\quad a_2\,,\quad a_3\,,\ldots,a_u\,,\quad b_1\,,\quad b_2\,,\quad b_3\,,\ldots,b_v\,,$$

gli elementi di H_s e

$$b_1\,,\quad b_2\,,\quad b_3\,,\ldots,b_v\,,\quad c_1\,,\quad c_2\,,\quad c_3\,,\ldots,c_u\,,$$

quelli di $H_{s,1}$, ad esempio: è $u+v$ il grado di H_s. Dovendo $H_{s,1}$ venir

(1) RIETZ, *Loc. cit.* pag. 11.

(2) Giacchè, se i sottogruppi (a) formano un'unica serie coniugata in G_s, vengono trasformati per mezzo di T' quando H_s corrisponde all'identità in T.

trasformato per mezzo degli elementi di H_s che esso non contiene, è trasformato per mezzo di uno degli elementi a, ed in H_s sono necessariamente sostituzioni che non trasformano $H_{s,1}$ in sè stesso. Sia S una di queste: $S^{-1}H_sS$ contiene allora tutti gli elementi a giacchè $H_{s,1}$ ed $S^{-1}H_{s,1}S$ hanno appunto v elementi in comune. Ma $a_{s,1}$, per mezzo del quale $H_{s,1}$ è trasformato, è contenuto in $S^{-1}H_{s,1}S$, e dunque non può trasformare $H_{s,1}$ in sè stesso. Analogamente $H_{s,1}$ non può trasformare in sè stesso $S^{-1}H_{s,1}S$: e siccome ciò è contrario alla relazione (c), così possiamo dire che se sono solamente due i costituenti transitivi del sottogruppo G_s di un gruppo primitivo d'ordine dispari, tale sottogruppo risulta da isomorfismo oloedrico fra quei costituenti.

Il G_s risulta da isomorfismo oloedrico fra costituenti transitivi primitivi, se questi non sono più di quattro, ed anche questo si deduce facilmente. Ammettiamo infatti che ciò non sia: allora all'identità di qualcuno dei costituenti transitivi T di grado t corrisponderà in G_s un sottogruppo invariante H_s che avrà o due o tre sistemi d'intransitività. Ne abbia tre e sia $(g-\alpha)$ il suo grado: sarà $(\alpha-1)=t$, e nel coniugato di G_s che lascia un elemento di T invariato, il sottogruppo H sarà uno dei t coniugati, il che non può essere giacchè sappiamo che questi $(\alpha-1)$ sottogruppi non possono esser coniugati. (1) Ne abbia dunque due; allora è $n-\alpha=0$, mod. 2 e anche $\alpha-1\equiv 0$, mod. 2 e gli $(\alpha-1)$ sottogruppi (a) potranno venir trasformati solamente per mezzo d'un gruppo T' avente due costituenti transitivi, il che conferma l'affermazione fatta.

9. I costituenti transitivi $T_1, T_2, T_3, \ldots$ di G_s siano d'egual grado t e d'ordine $s_1, s_2, s_3, \ldots$ rispettivamente: mostreremo che se i rapporti $\frac{s_1}{t}, \frac{s_2}{t}, \frac{s_3}{t}, \ldots$ non contengono un dato numero p che sia fattore di t, l'ordine di G_s è della forma kt, essendo k un numero primo con t.

Ammettiamo ancora che ciò non sia e che il sottogruppo invariante H_s di G_s corrispondente all'identità in T_1 sia d'ordine $h=qp^m$, essendo q primo con p ed $m>0$; le sostituzioni di H_s che hanno per ordini qualche potenza di p generano allora un gruppo H'_s d'ordine q_1p^m, invariante in G_s. Nel coniugato G_r di G_s lasciamo invariato un elemento appartenente a T_1: avremo $\frac{1}{t}$ sostituzioni di G_s, e H'_s apparterrà alla serie dei t coniugati che G_r trasforma per mezzo di uno dei suoi costituenti transitivi T di grado t. Il sottogruppo invariante H'_r di G_r corrispondente all'operazione identica di T contiene le sostituzioni comuni a G_r e G_s, giacchè trasforma H'_s in sè stesso, e sarà dunque d'ordine q_2p^m, essendo q_2 un numero primo con p. Ma poichè tutte le sostituzioni di T_1 i di cui ordini non sono numeri primi con p sono di grado t, ne segue che le so-

(1) MILLER, *Proc. of the London Math. Soc.*, vol. XXVIII, pag. 535: "Se tutti i costituenti transitivi di G_1 sono gruppi primitivi, la serie (a) non può essere una serie coniugata in G''_1".

stituzioni i di cui ordini sono potenze di p e sono comuni a G_r e G_s appartengono ad H_s.

Se H'_s contenesse tutte queste sostituzioni di H_s, sarebbe invariante in G_r ed in G_s, il che non può ammettersi essendo entrambi questi sottogruppi, i massimi. Ne contenga solamente una parte e siano P le rimanenti: l'ordine di $[H'_r, P]$ è un multiplo di p^{m+1} ed i due sottogruppi G_s e G_r hanno gruppi d'ordine p^{m+1} in comune, ciò che invece non può essere essendo l'ordine di H_s primo con p^{m+1} già per ipotesi. L'ordine di G_s deve dunque necessariamente essere della forma kt, dove, come già abbiamo supposto, è k primo con p, numero primo contenuto quale fattore in t.

Questa proprietà di G_s dà luogo ad alcune importanti conseguenze che si possono riassumere brevemente. L'ordine di G_s non può essere multiplo del quadrato del numero primo p nè se in G_s è un costituente transitivo di grado p, nè se tutti i suoi costituenti transitivi di grado mp $(p > m)$, posseggono p sistemi d'imprimitività: se poi i costituenti transitivi di dato grado p^α sono di classe $p^\alpha - 1$, il loro ordine non può essere multiplo di $p^{\alpha+1}$. Infine, se il numero primo p è grado d'un certo numero di costituenti transitivi di H_s, il gruppo che essi determinano risulta da isomorfismo oloedrico stabilito fra di essi.

10. In G_s sia un sottogruppo invariante H_s di grado $n - \alpha$ $(\alpha > 1)$: mostriamo che allora G_s ha almeno un costituente transitivo il di cui grado supera il grado di ciascuno dei costituenti transitivi di H_s. Se ammettiamo infatti che quello fra i costituenti transitivi di G_s che ha grado più alto sia di grado eguale a quello del costituente transitivo T di H_s, allora, siccome H_s entra tanto in G_s che nel suo coniugato G_r che lascia un elemento di H_s invariato, i due gruppi G_s e G_r hanno almeno un costituente transitivo formato dagli stessi elementi, da quelli di T, ad esempio, ed il gruppo $[G_s, G_r]$ è intransitivo. Ma deve invece essere identico a G, essendo G_s sottogruppo massimo; dunque H_s non può avere il costituente transitivo T di grado quale lo abbiamo supposto.

Da ciò, ricordando che ogni sottogruppo invariante di un gruppo primitivo è transitivo, deduciamo che se tutti i costituenti transitivi di G_s sono gruppi primitivi d'egual grado t, il semplice isomorfismo stabilito fra di essi determina G_s. Che inoltre, se fra i costituenti transitivi di questo è un gruppo regolare T il di cui grado t è minore del suo ordine, allora G_s deve possedere un altro costituente transitivo dello stesso grado t il cui sottogruppo che lascia un elemento invariante, sposta tutti i rimanenti.

In una prossima nota applicheremo alcuni di questi teoremi a dimostrare certe proprietà dei gruppi metrici.

C. ALASIA.

UN CRITERIO DI CONVERGENZA DELLA SERIE DI LAGRANGE

1. La formola di Lagrange, è noto, ha per iscopo di ottenere una delle radici dell'equazione (in z) della forma

$$z - u - t f(z) = 0 \tag{1}$$

sviluppata in serie di potenze di t, essendo u e t due parametri e $f(z)$ una funzione analitica di z, regolare nel punto $z = u$.

Il primo membro della (1) è una funzione di z e di t, $\Phi(z, t)$ che si annulla per $z = u$, $t = 0$; ed essendo

$$\left(\frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial z}\right)_{\substack{z=u\\ t=0}} \neq 0$$

per ogni valore di t, sufficientemente prossimo a zero, la (1) ha una radice ζ prossima ad u e sviluppabile nell'intorno di $t = 0$, nella serie:

$$\zeta = u + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots \tag{2}$$

in cui

$$a_n = \frac{1}{\underline{|n}} \left(\frac{\partial^n \zeta}{\partial t^n}\right)_0$$

dove l'indice 0 indica che si deve prendere il valore della derivata per $t=0$ e $\frac{\partial^n \zeta}{\partial t^n}$ è la derivata rispetto a t della funzione ricavata dall'equazione data, derivata che contrassegnamo coi segni delle derivazioni parziali perchè, venendo la funzione ζ a dipendere anche da u, si possono considerare derivazioni rispetto a questo parametro.

Immaginando ora attribuito ad u un valore particolare, regolare per $f(z)$, indichiamo con $F(\zeta)$ una funzione analitica di ζ, regolare in $\zeta = u$, sviluppabile cioè nell'intorno di u, in una serie di potenze di $\zeta - u$

$$F(\zeta) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \alpha_n (\zeta - u)^n. \tag{3}$$

Se t è prossimo a zero, ζ sarà sufficientemente vicina ad u e si potrà trovare un intorno di $t = 0$, per esempio un cerchio di raggio ε, nel quale sia

$$|\zeta - u| < \sigma$$

essendo σ una quantità piccola a piacere. Entro il cerchio di raggio ε, $\zeta - u$ è sviluppabile in una serie di potenze di t, quindi, entro tale cerchio, i termini della serie (3), che è convergente in egual grado, sono funzioni finite, continue e monodrome di t, regolari per $t = 0$, e $F(\zeta)$ è sviluppabile in una serie di potenze di t della forma

$$F(\zeta) = F(u) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\underline{|n}} \left(\frac{\partial^n F(\zeta)}{\partial t^n}\right)_0 t^n,$$

dove

$$\left(\frac{\partial^n F(\zeta)}{\partial t^n}\right)_0$$

è il valore per $t = 0$ della derivata n^{ma} rispetto a t, di ciò che diventa $F(\zeta)$ quando, per ζ, si ponga la serie (2).

Con facili calcoli, (1) si trova

$$\left(\frac{\partial^n F(\zeta)}{\partial t^n}\right)_0 = \frac{\partial^{n-1}}{\partial u^{n-1}} [f^n(u) F'(u)],$$

essendo $F'(u)$ il valore della derivata di $F(\zeta)$ rispetto a ζ, per $\zeta = u$.

Si ha così

$$F(\zeta) = F(u) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{t^n}{|\underline{n}} \cdot \frac{\partial^{n-1}}{\partial u^{n-1}} [f^n(u) F'(u)],$$

che è la formola di Lagrange nella sua forma più generale.

Se in particolare

$$F(\zeta) = \zeta,$$

si ha

$$\zeta = u + tf(u) + \frac{t^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{df^2(u)}{du} + \ldots + \frac{t^n}{1 \cdot 2 \ldots n} \cdot \frac{d^{n-1} f^n(u)}{du^{n-1}} + \ldots$$

che dà lo sviluppo di una delle radici della (1) in una serie ordinata secondo le potenze intere e positive di t.

2. Indichiamo con u_0 una radice qualunque dell'equazione

$$f(z) = 0$$

e immaginiamo che, nella (1), al parametro u sia attribuito un valore tanto prossimo a u_0 che, descrivendo nel piano z col centro in $z = u$ un cerchio Γ di raggio $| u_0 - u |$, entro Γ e sul contorno, la funzione $f(z)$ si mantenga sempre finita, mantenendosi anche diversa da zero nell'interno di Γ e annullandosi sul contorno solo in u_0. Descriviamo inoltre col centro in $z = u$ un secondo circolo C interno a Γ, il cui raggio, minore di $| u_0 - u |$, possiamo anche supporlo prossimo quanto si vuole a questa quantità.

Dalla (1) si ricava

$$t = \varphi(z) = \frac{z - u}{f(z)},$$

ossia

$$t = b_1 (z - u) + b_2 (z - u)^2 + \ldots$$

con $b_1 \neq 0$, perchè, essendo

$$\varphi'(z) = \frac{f(z) - (z - u) f'(z)}{[f(z)]^2},$$

si ha

$$b_1 = \varphi'(u) \neq 0.$$

La funzione $\varphi(z)$ allora, entro C e nel contorno, non si annulla nè diventa infinita, tranne in $z = u$, in cui si annulla, e il suo modulo avrà sul contorno s di C, un minimo M_0 ($\neq 0$).

Descriviamo ora nel piano t, col centro in $t = 0$, un circolo C' di raggio M_0; ad ogni punto t entro C', corrisponderà un solo punto ζ entro C e ζ sarà una funzione analitica di t, regolare nell'intorno di $t = 0$. (2) Per tutti i valori di t entro C' si avrà uno sviluppo della forma

$$\zeta = u + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots,$$

il quale dovrà necessariamente coincidere con lo sviluppo di Lagrange.

(1) BERTRAND, *Calcul différentiel.*

(2) BIANCHI L., *Funzioni di variabile complessa*, § 58.

Possiamo dunque concludere che pei valori di t situati entro un circolo col centro in $t = 0$ e con un raggio eguale a M_0, la serie di Lagrange è necessariamente convergente. Di qui, il

TEOREMA. — *Se al parametro* u *dell'equazione*

$$z - u - tf(z) = 0$$

sono attribuiti valori sufficientemente prossimi ad una radice u_0 *dell'equazione*

$$f(z) = 0,$$

tali che, descrivendo nel piano z *col centro in* $z = u$ *un cerchio* Γ *di raggio* $|u_0 - u|$ *entro* Γ *e sul contorno la funzione* $f(z)$ *si mantenga sempre finita, sia diversa da zero entro* Γ *e si annulli sul suo contorno solo in* u_0, *indicando con* M_0 *il minimo del modulo della funzione* $\frac{z-u}{f(z)}$ *sul contorno di un qualunque circolo col centro in* $z = u$ *e interno a* Γ, *la serie*

$$u + tf(u) + \frac{t^2}{1.2} \cdot \frac{df^2(u)}{du} + \ldots + \frac{t^n}{1.2\ldots n} \cdot \frac{d^{n-1} f^n(u)}{du^{n-1}} + \ldots$$

è certamente convergente per tutti i valori di t *interni al cerchio col centro in* $t = 0$ *e col raggio eguale a* M_0.

GUIDO SADUN

Siena.

LE EQUAZIONI RECIPROCHE IN SENSO GENERALE

L'illustre matematico francese G. DE LONGCHAMPS in una interessante nota « Sulle equazioni quadratiche » (*Jour. de Math.*, vol. 6°, pag. 265) indicò mediante un caso particolare (equazione di 4° grado) come andrebbe generalizzata la teoria delle equazioni reciproche. Siccome non ho visto sviluppato altrove questo concetto, che mi sembra meritevole di considerazione, ne ho fatto argomento di questa nota.

1. DEFINIZIONE. — (De Longchamps). — *Una equazione di grado* n, $f(x) = 0$ *è reciproca quando si ha identicamente*

$$f(x) = \lambda x^n f\left(\frac{k}{x}\right),$$

per valori convenientemente scelti di k *e* λ.

Il numero k lo diremo il modulo di reciprocità della equazione.

Dalla definizione resulta che affinchè un'equazione

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1)$$

sia reciproca, deve aversi identicamente

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x^2 + a_{n-1}x + \\ + a_n = \lambda(a_0k^n + a_1k^{n-1}x + \ldots + a_{n-2}k^2x^{n-2} + a_{n-1}kx^{n-1} + a_nx^n).$$

Dalla identificazione dei coefficienti resulta

$$a_0 = \lambda a_n\,, \qquad a_1 = \lambda a_{n-1}k\,, \ldots, a_{n-1} = \lambda a_1 k^{n-1}, \qquad a_n = \lambda a_0 k^n\,,$$

da cui

$$a_1 = \frac{a_0 a_{n-1}}{a_n} k, \quad a_2 = \frac{a_0 a_{n-2}}{a_n} k^2, \ldots, a_{n-1} = \frac{a_0 a_1}{a_n} k^{n-1}, \quad a_n = \frac{a_0^2}{a_n} k^n,$$

ed anche

$$k = \frac{a_1 a_n}{a_0 a_{n-1}}, \qquad k^2 = \frac{a_2 a_n}{a_0 a_{n-2}}, \ldots, k^{n-1} = \frac{a_{n-1} a_n}{a_1 a_0}, \qquad k^n = \frac{a_n^2}{a_0^2}.$$

L'i-esima di queste formule dà

$$k^i = \frac{a_i}{a_{n-i}} \cdot \frac{a_n}{a_0}\,,$$

e l'ultima

$$k = \left(\frac{a_n}{a_0}\right)^{\frac{2}{n}};$$

eliminando k fra queste si ha

$$\frac{a_i}{a_{n-i}} = \left(\frac{a_0}{a_n}\right)^{\frac{n-2i}{n}}$$

ovvero posto $\mu = \sqrt[n]{\frac{a_0}{a_n}}$,

$$a_i = a_{n-i}\mu^{n-2i}. \tag{R}$$

Per n pari si hanno così $\frac{1}{2}n - 1$ condizioni che, scritte per disteso, sono

$$a_1^n a_n^{n-2} = a_{n-1}^n a_0^{n-2}, \quad a_2^n a_n^{n-4} = a_{n-2}^n a_0^{n-4}, \ldots, a_{\frac{1}{2}n-1}^n a_n^2 = a_{\frac{1}{2}n+1}^n a_0^2 \tag{2}$$

e per n dispari se ne hanno $\frac{1}{2}(n-1)$, che, scritte per disteso, sono

$$a_1^n a_n^{n-2} = a_{n-1}^n a_0^{n-2}, \quad a_2^n a_n^{n-4} = a_{n-2}^n a_0^{n-4}, \ldots, a_{\frac{1}{2}(n-1)}^n a_n = a_{\frac{1}{2}(n+1)} a_0. \tag{3}$$

2. Equazione reciproca di grado pari.

L'equazione reciproca di grado pari (in senso generale) è della forma

$$a_0 x^{2k} + a_1 x^{2k-1} + \ldots + a_k x^k + \ldots + a_2 \lambda^{k-2} x^2 + a_1 \lambda^{k-1} x + \lambda^k a_0 = 0. \tag{1}$$

Infatti, data l'equazione

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{\frac{1}{2}n} x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

ed ammesso che fra' suoi coefficienti sussistano le (R), ponendo inoltre $\lambda = \mu^2$, si ha la (1).

La risoluzione della (1) *si può far dipendere da quella di un'equazione di grado* k *e da* k *equazioni quadratiche.*

Infatti, ponendo

$$x + \frac{\lambda}{x} = y,$$

la (1) diviene

$$\psi(y) = 0,$$

e questa è un'equazione di grado k. Indichiamo poi con $y_1, y_2, \ldots y_k$ le sue radici, tutte le radici della (1) si otterranno dalle equazioni quadratiche

$$x^2 - yx + \lambda = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots k)$$

Equazioni reciproche di grado dispari.

LEMMA. — *Sopprimendo nella equazione*

$$a_0(x^n+\mu^n)+a_1x(x^{n-2}+\mu^{n-2})+a_2x^2(x^{n-4}+\mu^{n-4})+\dots$$
$$\dots+a_{\frac{1}{2}(n-1)}x^{\frac{1}{2}(n-1)}(x+\mu)=0; \qquad (n=2k+1)$$

la radice $x=-\mu$, *l'equazione risultante è della forma*

$$a_0x^{n-1}+A_1x^{n-2}+\dots+A_2\mu^{n-3}x^2+A_1\mu^{n-2}x+a_0\mu^{n-1}=0. \tag{4}$$

La cosa non presenta alcuna difficoltà eseguendo le diverse divisioni ed aggruppando convenientemente i coefficienti. Per questi si trova la legge di ricorrenza

$$A_p=-\mu A_{p-1}+a_p,$$

colla condizione iniziale $A_0=a_0$.

La (2) *è un'equazione reciproca* (senso generale).

TEOREMA. — *Una equazione reciproca di grado dispari* (*in senso generale*) *ammette la radice* $x=-\sqrt{\frac{a_n}{a_0}}$ *e soppressa questa radice, l'equazione risultante è un'equazione reciproca di grado pari della forma* (2).

Infatti osserviamo subito che un'equazione generale (1) § 1 può mettersi sotto la forma

$$f(x)=a_0\left(x^n+\frac{a_n}{a_0}\right)+a_1x\left(x^{n-2}+\frac{a_{n-1}}{a_1}\right)+\dots=0,$$

e questa in virtù delle (R) del § 1 può scriversi

$$f(x)=a_0\left(x^n+\frac{a_n}{a_0}\right)+a_1x\left(x^{n-2}+\sqrt[n]{\frac{a_n^{n-2}}{a_0^{n-2}}}\right)+\dots$$
$$\dots+a_{\frac{1}{2}(n-1)}x^{\frac{1}{2}(n-1)}\left(x+\sqrt{\frac{a_n}{a_0}}\right)=0,$$

che è precisamente della forma della equazione presa a considerare nel *Lemma*, ed il Teor. è dimostrato.

Da quanto abbiamo esposto risulta pure

La risoluzione di una equazione reciproca di grado dispari ($n=2r+1$) *si può far dipendere dalla risoluzione di una equazione di grado* r.

Equazioni reciproche ordinarie. Prendendo il modulo di reciprocità uguale ad 1, si ha $\frac{a_n}{a_0}=\pm 1$. Allora, per $n=2r+1$ si ha

$$\begin{cases} a_0=a_n, \quad a_{n-1}=a_1, \dots \quad \text{per} \quad k=+1 \\ a_0=-a_n, \quad a_1=-a_{n-1}, \dots \quad \text{per} \quad k=-1, \end{cases}$$

e per $n=2r$ si ha

$$\begin{cases} a_0=a_n, \ a_1=a_{n-1}, \dots, a_{\frac{1}{2}n}=a_{\frac{1}{2}n} \ \text{per} \ k=+1 \\ a_0=-a_n, \ a_1=-a_{n-1}, \dots, a_{\frac{1}{2}n}=-a_{\frac{1}{2}n} \ \text{epperò} \ a_{\frac{1}{2}n}=0 \ \text{per} \ k=-1. \end{cases}$$

Applicazioni.

Equazioni di 3° grado.

Dalle (3) del § 1 si ricava che deve esistere la relazione

$$a_1^3 a_3 = a_2^3 a_0\,, \tag{1}$$

fra' coefficienti dell'equazione

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a^3 = 0, \tag{2}$$

affinchè questa sia reciproca nel senso generale. Lascio alla cura dello studioso il resto dell'applicazione e faccio notare che:

Un'equazione reciproca, nel senso generale, di 3° grado si può mettere sotto la forma

$$\alpha^3X^3 + \alpha X^2 + \beta X + \beta^3 = 0. \tag{3}$$

Infatti la (2), mediante la (1) e ponendo $x = X\dfrac{a_0}{a_1^3}$ diviene

$$\frac{a_0^3}{a_1^6}X^3 + \frac{a_0}{a_1^2}X^2 + a_2X + a_2^3 = 0$$

e ponendo in questa $\dfrac{a_0}{a_1^2} = \alpha,\ a_2 = \beta$ si ha la (3)

La (3) ha una radice $X = -\dfrac{\beta}{\alpha}$, e la condizione di realità delle altre due è

$$(\alpha\beta + 1)(3\alpha\beta - 1) \leqslant 0.$$

Equazioni di 4° grado.

La equazione reciproca di 4° grado (in senso generale) dipende da tre equazioni di 2° grado.

Infatti l'equazione

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0, \tag{1}$$

perchè sia reciproca nel senso generale deve ammettere fra' suoi coefficienti l'unica relazione

$$a_1^2a_4 = a_0a_3^2; \tag{2}$$

allora essa diviene

$$a_0\left(x^2 + \frac{a_3^2}{a_1^2x^2}\right) + a_1\left(x + \frac{a_3}{a_1x}\right) + a_2 = 0,$$

e ponendo

$$y = x + \frac{a_3}{a_1x},$$

questa diviene

$$a_0y^2 + a_1y + a_2 - \frac{2a_3}{a_1} = 0.$$

In conclusione indicando con y_1 ed y_2 le radici di quest'ultima, le radici della (1) sono quelle delle altre due equazioni

$$x^2 - a_1y_1x + a_3 = 0, \qquad x^2 - a_1y_2x + a_3 = 0.$$

Risolvendo effettivamente la (1) si perviene alle seguenti conclusioni:
Ponendo

$$R = a_1^4 - 4a_0a_1^2a_2 + 8a_0a_1a_3\,,$$

Se $R>0$ il primo membro della (1) è decomponibile in 2 fattori quadratici reali,
» $R=0$ » » » è il quadrato di un'espressione quadratica,
» $R<0$ » » » è decomponibile in 2 fattori imm. coniug.

S'intende bene che la (1) è ritenuta reciproca in senso generale.

L'equazione reciproca (senso generale) *di 4° grado si può mettere sotto la forma*

$$\alpha^2x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \gamma^2 = 0.$$

(De Longchamps).

Infatti basta trasformare la (1) mediante la posizione $x = \frac{a_0}{a_1^2}X$ e tenere presente la relazione (2). Sotto questa forma più simmetrica la sua risoluzione viene a dipendere dalla quadratica

$$\alpha X^2 - \frac{1 \pm \sqrt{1-4\beta+8\alpha\beta}}{2}X + \gamma = 0.$$

Equazioni di 5° grado.

Nel caso dell'equazione di 5° grado

$$a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^1 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0,$$

le relazioni che debbono sussistere, perchè sia reciproca in senso generale, sono

$$a_1^5a_5^3 = a_0^3a_4^5, \qquad a_2^5a_5 = a_0a_3^5,$$

e mediante queste relazioni essa può scriversi

$$a_0\left[x^5 + \left(\sqrt[5]{\frac{a_5}{a_0}}\right)^5\right] + a_1x\left[x^3 + \left(\sqrt[5]{\frac{a_5}{a_0}}\right)^3\right] + a_2x^2\left[x + \sqrt[5]{\frac{a_5}{a_0}}\right] = 0$$

e messa sotto questa forma si vede che ammette la radice $x = -\sqrt[5]{\frac{a_5}{a_0}}$.

Sopprimendo questa radice, le altre radici della equazione in questione si otterranno dalla equazione di 4° grado

$$a_0x^4 + (a_1 - a_0\mu)x^3 + (a_2 - a_1\mu + a_0\mu^2)x^2 + (a_1\mu^2 - a_0\mu^3)x + a_0\mu^4 \quad \left(\mu = \sqrt[5]{\frac{a_5}{a_0}}\right)$$

che ha la forma

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + \alpha^2Ax + \alpha^4 = 0\,,$$

cioè di un'equazione reciproca in senso generale.

G. Candido

Galatina.

INTORNO AD UNA FORMA DEL POTENZIALE DI UNA MASSA SFERICA, LA CUI DENSITÀ NON SIA COSTANTE

Nel suo celebre *Trattato di Analisi,* (1) ÉMILE PICARD, come applicazione delle nozioni relative agli integrali multipli, studia le proposizioni più semplici della teoria dell'attrazione.

Suppone ripartita, in un corpo attirante, la materia in modo continuo, in modo cioè che la densità δ sia una funzione continua delle coordinate a, b, c d'un punto variabile della massa attirante. Le tre componenti X, Y, Z dell'attrazione esercitata su un punto di coordinate x, y, z sono allora

$$X = \int\int\int \frac{(a-x) \cdot \delta \cdot du}{r^3}$$

$$Y = \int\int\int \frac{(b-y) \cdot \delta \cdot du}{r^3}$$

$$Z = \int\int\int \frac{(c-z) \cdot \delta \cdot du}{r^3}$$

ove $du = da \cdot db \cdot dc$ e $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$, gli integrali tripli essendo estesi alla massa attraente. Le X, Y, Z sono da considerarsi come funzioni di x, y, z. Si dimostra che esse sono le derivate parziali rispetto ad x, y, z d'una stessa funzione rappresentata dall'integrale

$$V(x, y, z) = \int\int\int \frac{\delta \cdot du}{r}$$

esteso alla massa attirante, ed al quale si dà il nome di *potenziale.*

Si stabiliscono quindi le seguenti proprietà generali del potenziale $V(x, y, z)$:

Esso è una funzione continua in tutto lo spazio, e lo sono altresì le sue derivate parziali del primo ordine. Le derivate seconde sono continue nell'interno ed all'esterno delle masse attiranti; la superficie di separazione del mezzo esterno e delle masse attiranti sarà per esse una superficie di discontinuità. Si ha inoltre

$$\Delta V = 0$$

all'esterno, e

$$\Delta V = -4\pi\delta \text{ (2)}$$

all'interno delle masse attiranti.

(1) ÉMILE PICARD, *Traité d'Analyse.* Tome I.

(2) Formula celebre dovuta a *Poisson.*

Di più, $V(x, y, z)$ tende verso zero quando il punto (x, y, z) si allontana all'infinito in un modo qualunque.

Stabilisce che queste proprietà sono caratteristiche del potenziale e dimostra il seguente

THÉORÈME. — V *représentera nécessairement le potentiel en* (x, y, z) *dû à l'attraction d'une matière répartie dans chacun des volumes, la loi de la densité étant représentée en chaque point par la fonction* δ. (1)

Basandosi su questa proprietà si conoscerà il potenziale dovuto all'attrazione di un corpo se si potrà determinare una fuzione V soddisfacente a tutte le condizioni precedenti.

Così il *Dirichlet* in una sua «Memoria», (2) nel caso dell'ellissoide, dà la seguente forma del potenziale $V(x, y, z)$ dovuto all'attrazione dell'ellissoide

$$V = \pi\, abc\,.\,\delta\,.\int_u^\infty \frac{1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}\, d\lambda.$$

***

Nella presente memoria, seguendo un procedimento speciale, mi propongo di determinare la forma di V quando si abbia una massa sferica nella quale la densità non varia, come generalmente si considera, per superficie sferiche concentriche, ma per superficie sferiche interne alla data e con i centri successivamente situati sopra un diametro di essa.

Vediamo pertanto quale relazione interceda fra l'ascissa del centro della sfera mobile ed il suo raggio, perchè le sfere sieno successivamente l'una interna all'altra.

L'equazione di una superficie sferica, riferita ad assi ortogonali cartesiani, col centro di coordinate a, b, c e di raggio r è

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2.$$

Se si immagina che a, b, c, r sieno tutte funzioni di una stessa variabile u, l'equazione

$$[x - a(u)]^2 + [y - b(u)]^2 + [z - c(u)]^2 = r^2(u) \qquad (1)$$

rappresenta, per ogni valore di u, una superficie sferica di raggio e centro diverso.

Se nell'equazione (1) facciamo quindi variare con continuità la u, varieranno pure con continuità la posizione del centro e la lunghezza del raggio. I centri delle superficie si troveranno, per conseguenza, su di una linea gobba di coordinate $a(u)$, $b(u)$, $c(u)$.

(1) Cfr. op. cit. pag. 173.
(2) *Journal de Crelle*, t. 32.

Ora, la condizione perchè di due superficie sferiche l'una sia interna all'altra è che la differenza dei raggi sia maggiore della distanza dei centri; per cui dovrà essere soddisfatta la ineguaglianza

$$\sqrt{[a(u+du)-a(u)]^2+[b(u+du)-b(u)]^2+[c(u+du)-c(u)]^2} < \\ < |r(u+du)-r(u)|,$$

od anche

$$\sqrt{\left(\frac{a(u+du)-a(u)}{du}\right)^2+\left(\frac{b(u+du)-b(u)}{du}\right)^2+\left(\frac{c(u+du)-c(u)}{du}\right)^2} < \\ < \left|\frac{r(u+du)-r(u)}{du}\right|,$$

e quindi, al limite,

$$\left|\sqrt{\left(\frac{da}{du}\right)^2+\left(\frac{db}{du}\right)^2+\left(\frac{dc}{du}\right)^2}\right| < \left|\frac{dr}{du}\right|.$$

Quindi, purchè questa condizione sia soddisfatta, qualunque siano le a, b, c, r, *l'equazione* (1) *rappresenta un sistema di superficie sferiche aventi i centri sopra una linea gobba, e poste l'una dentro l'altra.*

Per conseguenza, l'equazione

$$[x-a(u)]^2+[y-b(u)]^2+z^2=r^2(u)$$

rappresenterà un sistema di superficie sferiche eccentriche, i cui centri si trovano sopra una linea posta nel piano xy, determinato dalle equazioni

$$a(u)=x, \qquad b(u)=y.$$

Di tali superficie l'una sarà interna all'altra quando sia

$$\left|\sqrt{\left(\frac{da}{du}\right)^2+\left(\frac{db}{du}\right)^2}\right| < \left|\frac{dr}{du}\right|.$$

Finalmente, l'equazione

$$[x-a(u)]^2+y^2+z^2=r^2(u)$$

rappresenterà un sistema di superficie eccentriche, i cui centri sono sull'asse delle x; e la condizione che, in tal caso, dev'essere soddisfatta perchè l'una sia dentro l'altra è

$$\left|\sqrt{\left(\frac{da}{du}\right)^2}\right| < \left|\frac{dr}{du}\right|,$$

ossia dev'essere

$$\left|\frac{da}{du}\right| < \left|\frac{dr}{du}\right|.$$

Se la u si riduce alla a, allora dev'essere

$$1 < \left|\frac{dr}{du}\right|.$$

Se la u si riduce alla r, allora

$$1 > \left|\frac{da}{du}\right|.$$

***

Vediamo ora quale forma prenda l'integrale triplo generale esprimente la funzione potenziale di un corpo quando, come abbiamo precedentemente detto, la densità della massa vari per strati limitati da superficie sferiche le une interne alle altre, ma coi centri in linea retta.

La densità della massa sarà funzione del parametro della superficie, cioè sarà costante su ogni superficie. Imagineremo gli straterelli di spessore infinitesimo e di densità δ costante. È chiaro che la funzione potenziale di tutta la massa sarà equivalente alla somma delle funzioni potenziali dei singoli straterelli.

Per determinare la funzione potenziale relativa ad uno straterello qualunque, si consideri una sfera omogenea di densità 1 e di raggio r: la sua funzione potenziale relativa ad un punto esterno è

$$\tfrac{4}{3}\pi\frac{r^3}{l},$$

dove l indica la distanza del punto potenziato dal centro della sfera. Se si imagina di levare da questa sfera un'altra sfera, che non sia concentrica ad essa, e di raggio r_1, la funzione potenziale dell'involucro rimanente sarà quello della prima sfera diminuito di quello della seconda; cioè sarà

$$\tfrac{4}{3}\pi\left(\frac{r^3}{l}-\frac{r_1^3}{l_1}\right)$$

dove l_1 indica la distanza del punto potenziato dal centro della seconda superficie sferica limite dell'involucro; e quest'involucro sarà infinitesimo se si farà subire uno spostamento infinitesimo al centro della prima sfera, e se si farà diminuire di infinitamente poco il raggio di essa. Ritenendo r e l come funzioni di una variabile indipendente u, se le due superficie sferiche limiti dell'involucro corrispondono rispettivamente a due valori u e $u+du$ del parametro, la funzione potenziale di tale involucro sarà data dal differenziale dell'espressione

$$\tfrac{4}{3}\pi\frac{r^3}{l}.$$

Assunta la linea retta, sulla quale si trovano tutti i centri delle superficie, come asse delle x, e detta a, funzione di u, l'ascissa dei centri, la distanza di un punto di coordinate x, y, z dai centri sarà data da

$$l=\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}.$$

La funzione potenziale d'uno straterello sulla massa sferica sarà per conseguenza

$$\tfrac{4}{3}\pi\frac{d}{du}\left(\frac{r^3}{l}\right)du=4\pi\,.\,\frac{r^2}{l}\frac{dr}{du}du+\tfrac{4}{3}\pi\frac{r^3}{l^3}(x-a)\frac{da}{du}du,$$

sempre supponendo che la densità dell'involucro sia $=1$.

Se invece la densità dello strato è $\delta(u)$, allora la funzione potenziale sarà

$$4\pi\,\delta(u)\,.\left(\frac{r^2}{l}\frac{dr}{du}+\frac{r^3}{3}\frac{x-a}{l^3}\frac{da}{du}\right)du\,.$$

Dando ad u tutti i valori per i quali si hanno tutte le superficie sferiche, si avranno le funzioni potenziali di tutti gli straterelli nei quali resta divisa la massa sferica totale. La somma di tutte queste funzioni potenziali elementari dà il potenziale V del corpo sferico. Si avrà così

$$V=4\pi\int\delta(u)\,.\left(\frac{r^2}{l}\frac{dr}{du}+\frac{r^3}{3}\frac{x-a}{l^3}\frac{da}{du}\right)du\,.$$

Supposto che u_0 ed u_1 sieno i parametri corrispondenti alla prima ed all'ultima superficie sferica del sistema, saranno u_0 ed u_1 i limiti dell'integrale.

Giova notare che se per $u=u_0$ è $r=0$, allora si ha un corpo sferico pieno, limitato dalla superficie sferica corrispondente al parametro $u=u_1$; che se invece per $u=u_0$ è r diverso da zero, allora si ha un involucro sferico.

Dunque, *la funzione potenziale relativa ad un punto esterno al sistema dev' essere*

$$V=4\pi\int_{u_0}^{u_1}\delta(u)\,.\frac{r^2}{l}\left(\frac{dr}{du}+\frac{r}{3}\frac{x-a}{l^2}\frac{da}{du}\right)du\,.$$

Vediamo se questa funzione soddisfa alle suaccennate caratteristiche d'una funzione potenziale.

Essa pertanto è funzione delle coordinate del punto attratto, le quali sono contenute in l, ed è finita e continua in tutto lo spazio, giacchè r, a e $\delta(u)$ sono finite e continue con le derivate prime per i valori di u da u_0 ad u_1.

Se il punto potenziato va all'infinito, l diventa anch'esso infinito, e la funzione potenziale diventa nulla.

Infatti si può scrivere

$$V=4\pi\int_{u_0}^{u_1}\delta(u)\left(\frac{dr}{du}+\frac{r^2}{3l}\frac{x-a}{l}\,.\frac{da}{du}\right)du\,.$$

I fattori $\frac{r^2}{l}$ e $\frac{r}{l}$, per $l=\infty$, diventano eguali a zero, ed il fattore $\frac{x-a}{l}$ tende al coseno dell'angolo che l fa con l'asse delle x quando il punto sia all'infinito; e però

$$\lim_{l=\infty}V=0\,.$$

La massa M del sistema si ottiene calcolando il limite verso il quale tende $V\rho$, dove ρ è il raggio vettore del punto potenziato, quando ρ tende all'infinito. Ora è

$$\lim_{\rho=\infty}V\rho=4\pi\lim\int_{u_0}^{u_1}\delta(u)\,.\,r^2\,.\,\frac{\rho}{l}\left(\frac{dr}{du}+\frac{r}{3}\,.\,\frac{1}{l}\,.\,\frac{x-a}{l}\,.\,\frac{da}{du}\right)du\,.$$

Quando ρ diventa infinito, il fattore $\frac{\rho}{l}$ tende all'unità; e, per quanto si è osservato, si otterrà

$$\lim_{\rho=\infty} V\rho = 4\pi \int_{u_0}^{u_1} \delta(u) \,.\, r^2 \,.\, \frac{dr}{du} du = M \,.$$

Deve pur essere

$$\lim_{x=\infty} Vx = \cos \widehat{\rho x} \,.\, M\,;$$

ed infatti si ha

$$\lim_{x=\infty} Vx = 4\pi \lim \int_{u_0}^{u_1} \delta(u) \,.\, r^2 \,.\, \frac{x}{l} \left(\frac{dr}{du} + \frac{r}{3} \,.\, \frac{1}{l} \,.\, \frac{x-a}{l} \,.\, \frac{da}{du} \right) du \,.$$

ovvero

$$\lim_{x=\infty} Vx = 4\pi \int_{u_0}^{u_1} \delta(u) \,.\, r^2 \,.\, \cos \widehat{\rho x} \,.\, \frac{dr}{du} du$$

notando che quando il punto potenziato va all'infinito, le direzioni delle l coincidono con quelle delle ρ. Quindi, per il valore di M già trovato, sarà

$$\lim_{x=\infty} Vx = \cos \widehat{\rho x} \,.\, M.$$

Analogamente si ha

$$\lim_{y=\infty} Vy = \cos \widehat{\rho y} \,.\, M$$

e

$$\lim_{z=\infty} Vz = \cos \widehat{\rho z} \,.\, M.$$

Derivando la V rapporto alle coordinate x, y, z contenute in l si ottiene ordinatamente

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -4\pi \int_{u_0}^{u_1} \delta(u) \,.\, r^2 \,.\, \frac{x-a}{l^3} \,.\, \frac{dr}{du} du +$$

$$+ \tfrac{4}{3}\pi \int_{u_0}^{u_1} \delta(u) \,.\, \frac{r^3}{3} \left(\frac{1}{l^3} - \frac{3(x-a)^2}{l^5} \right) \frac{da}{du} du \,,$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -4\pi \int_{u_0}^{u_1} \delta(u) \,.\, r^2 \,.\, \frac{y}{l^3} \,.\, \frac{dr}{du} \,.\, du -$$

$$- \tfrac{4}{3}\pi \int_{u_0}^{u_1} \delta(u) \,.\, r^3 \,.\, \frac{3(x-a)\,y}{l^5} \,.\, \frac{da}{du} \,.\, du \,,$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -4\pi \int_{u_0}^{u_1} \delta(u) \,.\, r^2 \,.\, \frac{z}{l^3} \,.\, \frac{dr}{du} \,.\, du -$$

$$- \tfrac{4}{3}\pi \int_{u_0}^{u_1} \delta(u) \,.\, r^3 \,.\, \frac{3(x-a)\,z}{l^5} \,.\, \frac{da}{du} \,.\, du.$$

Queste derivate si mantengono finite e continue in tutto lo spazio esterno alla massa attraente, perchè l non si annulla mai in tutto il corso dell' integrazione.

Si può porre altresì

$$\frac{\partial V}{\partial x}=4\pi\int_{u_0}^{u_1}\delta(u)\frac{r^2}{l^2}\left[\frac{x-a}{l}\cdot\frac{dr}{du}+\frac{r}{3}\left\{\frac{1}{l}-\frac{3}{l}\left(\frac{x-a}{l}\right)^2\right\}\frac{da}{du}\right]du$$

e quindi

$$\lim\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\rho^2=4\pi\lim\int_{u_0}^{u_1}\delta(u)\,r^2\frac{\rho^2}{l^2}\left[\frac{x-a}{l}\cdot\frac{dr}{du}+\frac{r}{3}\left\{\frac{1}{l}-\frac{3}{l}\left(\frac{x-a}{l}\right)^2\right\}\frac{da}{du}\right]du$$

per cui, tenendo presente quanto si è già osservato, si ha

$$\lim\frac{\partial V}{\partial x}\rho^2=\mathrm{M}\cos\widehat{\rho x}.$$

Parimenti si ottiene

$$\lim\frac{\partial V}{\partial x}x^2=\mathrm{M}\cos^3\widehat{\rho x}.$$

Se si deriva nuovamente rispetto alle coordinate del punto potenziato, si ottiene

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=-4\pi\int_{u_0}^{u_1}\delta(u)\,r^2\frac{dr}{du}\left(\frac{1}{l^3}-\frac{3(x-a)^2}{l^5}\right)du-$$
$$-\frac{4}{3}\pi\int_{u_0}^{u_1}\delta(u)\,r^3\frac{da}{du}\left(\frac{3(x-a)}{l^5}+\frac{6(x-a)\,l^5-15\,l^3(x-a)^3}{l^{10}}\right)du,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=-4\pi\int_{u_0}^{u_1}\delta(u)\,r^2\frac{dr}{du}\left(\frac{1}{l^3}-\frac{3y^2}{l^5}\right)du-$$
$$-\frac{4}{3}\pi\int_{u_0}^{u_1}\delta(u)\,r^3\frac{da}{du}\cdot\frac{3l^5-15l^3y^2}{l^{10}}(x-a)\,du,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-4\pi\int_{u_0}^{u_1}\delta(u)\,r^2\frac{dr}{du}\left(\frac{1}{l^3}-\frac{3z^2}{l^5}\right)du-$$
$$-\frac{4}{3}\pi\int_{u_0}^{u_1}\delta(u)\,r^3\frac{da}{du}\cdot\frac{3l^5-15l^3z^2}{l^{10}}(x-a)\,du.$$

Sommando membro a membro si otterrà

$$\Delta_2 V=-4\pi\int_{u_0}^{u_1}\delta(u)\,r^2\frac{dr}{du}\left(\frac{3}{l^3}-3\frac{(x-a)^2+y^2+z^2}{l^5}\right)du-$$
$$-\frac{4}{3}\pi\int_{u_0}^{u_1}\delta(u)\,r^3\frac{da}{du}\left(\frac{15(x-a)\,l^5}{l^{10}}-15(x-a)\,l^3\frac{(x-a)^2+y^2+z^2}{l^{10}}\right)du;$$

e quindi

$$\Delta_2 V=0.$$

La espressione di V così determinata è valida soltanto per i punti esterni alla massa attraente e non posti nella cavità interna, se si tratta di un involucro.

G. Repetto

Sassari.

(Continua)

QUISTIONI PROPOSTE

704. Risolvere l'equazione

$$\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \dots & x \\ x & -1 & x & x \dots & x \\ x & x & -1 & x \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x & x & x & x \dots & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

E. Piccioli.

705. Si consideri un'ellisse E ed un'iperbole equilatera H che ha per vertici reali i fuochi di E. Se t, t' sono le tangenti condotte da un punto P di H alla E, si dimostri che l'angolo di t coll'asse maggiore è uguale a quello di t' coll'asse minore.

706. Sia F un fuoco, O il centro ed M un punto variabile di una ellisse, e P la proiezione del centro O sulla perpendicolare da M alla MF. Trovare la curva luogo di P, e l'area della medesima.

707. Siano F, F' i fuochi di un'ellisse, A, B, C, D i piedi delle normali ad essa condotte da un punto M del suo piano. Trovare il luogo dei punti M tali che

$$AF \,.\, AF' + BF \,.\, BF' + CF \,.\, CF' + DF \,.\, DF' = \text{costante}.$$

E.-N. Barisien.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 700, 701 e 702

700. *Da un punto* P *del piano di una parabola si conducano le tre normali, di cui i piedi siano* A, B, C. *Le tangenti in* A, B, C *s'incontrino nei punti* A_1, B_1, C_1 *Dimostrare che:*

1°. La retta congiungente P *coll'ortocentro del triangolo* $A_1B_1C_1$ *è parallela alla congiungente l'ortocentro del triangolo* ABC *col circumcentro del triangolo* $A_1B_1C_1$.

2°. I tre punti A_1, B_1, C_1 *sono situati sopra un'iperbole equilatera avente per assintoti l'asse e la tangente nel vertice della parabola data. Questa iperbole non cambia, se* P *si sposta sopra una retta parallela all'asse della parabola.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del prof. V. Retali di Milano.

Sia $y^2 = 2px$ l'equazione della parabola riferita all'asse e alla tangente al vertice: l'iperbole d'Apollonio relativa al punto P (α, β) è

$$xy + 2p(p-\alpha)y - 2p^2\beta = 0$$

e le ordinate dei punti d'incidenza son radici della equazione cubica

$$y^3 + 2p(p-\alpha)y - 2p^2\beta = 0,$$

che si ha eliminando x fra le due precedenti; abbiamo dunque

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0, \qquad y_1y_2y_3 = 2p^2\beta.$$

Per equazione del cerchio circoscritto al triangolo ABC si trova facilmente

$$x^2 + y^2 - (p + \alpha)\,x - \tfrac{1}{2}\beta y = 0,$$

laonde le coordinate del circumcentro $O\,(x', y')$ di ABC sono

$$x' = \tfrac{1}{2}(p + \alpha), \qquad y' = \tfrac{1}{4}\beta;$$

per avere quelle dell'ortocentro $H\,(x''', y''')$ dello stesso triangolo, osservo che le coordinate del baricentro sono

$$x'' = \tfrac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \qquad y'' = 0,$$

dunque

$$x''' = -2x' + 3x'' = -3p + \alpha$$
$$y''' = -2y' + 3y'' = -\tfrac{1}{2}\beta. \qquad (1)$$

I valori delle coordinate dei punti A_1, B_1, C_1, sono

$$\xi_1 = \frac{y_2 y_3}{2p}, \qquad \eta_1 = -\tfrac{1}{2} y_1 \qquad (2)$$

e gli altri che se ne deducono con rotazione sugli indici; l'equazione del circolo circoscritto al triangolo $A_1B_1C_1$ è

$$x^2 + y^2 - (\tfrac{5}{2}p - \alpha)\,x + \beta y + \tfrac{1}{2}p\,(p - \alpha) = 0,$$

laonde le coordinate del circumcentro $O_1\,(x'_1, y'_1)$ di $A_1B_1C_1$ sono

$$x'_1 = \tfrac{5}{4}p - \tfrac{1}{2}\alpha, \qquad y'_1 = -\tfrac{1}{2}\beta. \qquad (3)$$

L'ortocentro $H_1\,(x'''_1, y'''_1)$ di $A_1B_1C_1$, per un teorema notissimo, è sulla direttrice della parabola ed ha per ordinata

$$y'''_1 = \frac{y_1 y_2 y_3}{2p^2} + \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3) = \beta. \qquad (4)$$

Dalle (1), (3), (4) risulta che le due rette HO_1, PH_1, dell'enunciato sono parallele all'asse della parabola.

Dalla (2) abbiamo

$$\xi_1\eta_1 = \xi_2\eta_2 = \xi_3\eta_3 = -\frac{y_1 y_2 y_3}{4p} = -\tfrac{1}{2}p\beta;$$

dunque, i punti d'incidenza delle tre normali cadono sull'iperbole equilatera

$$xy = -\tfrac{1}{2}p\beta.$$

701. *Sia* M *un punto variabile sopra un'ellisse della quale* FF' *sono i fuochi,* AA' *gli estremi dell'asse maggiore. Dimostrare che le bisettrici degli angoli* MFF', MF'A *incontrano* MA *sulle due direttrici rispettivamente.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del prof. V. Retali di Milano.

Il teorema e la dimostrazione seguente valgono anche per l'iperbole. Le bisettrici F1, F2, degli angoli MFA, MFA', incontrino MA rispettivamente nei punti 1 e 2: il gruppo (M1A2) è armonico e, siccome le rette ortogonali F1, F2, passanti pel fuoco sono coniugate rispetto alla conica, il punto 2 è polo di | F1 | e giace sulla direttrice corrispondente a F. Analogamente: dette 2', 1', le intersezioni di F1, F2 con MA', si vede che 2' è il polo di | F2 | e giace sulla direttrice medesima.

Osservazione. — La stessa dimostrazione vale per la parabola. Siano A, F, A', M, rispettivamente il vertice, il fuoco, il punto improprio e un punto generico d'una parabola: la bisettrice F2 dell'angolo MFA' incontra MA in 2, sulla direttrice. La bisettrice dell'angolo MFA taglia in 2' sulla direttrice il diametro MA'.

702. *Se* M *è un punto d'un'ellisse, della quale* F, F' *sono i fuochi,* M' *è il simmetrico di* M *rispetto all'asse minore,* F_1, F'_1 *sono i secondi punti d'incontro dell'ellisse colle rette* MF, MF', *dimostrare che la retta* $F_1F'_1$ *e la tangente in* M' *s'incontrano sull'asse maggiore.*

E.-N. Barisien.

1ª Risoluzione del prof. V. Retali di Milano.

Se μ è il simmetrico di M rispetto al centro, il fascio $M(M'\mu F_1F'_1)$ è armonico [1] e per conseguenza le tangenti in M',μ, si tagliano sulla retta F'_1F_1.

Osservazione. — Il teorema, che vale anche per l'iperbole, è corollario immediato di una proprietà evidente del quadrilatero completo circoscritto a una conica; siano F, F' due vertici opposti, O, X i due punti diagonali sopra $|FF'|$: poichè il gruppo F'OFX è armonico, i raggi che lo proiettano da un punto arbitrario M della conica segano questa di nuovo in 4 punti armonici $F'_1\mu F_1M'$ e le tangenti in μ, M', si tagliano sulla $|F'_1F_1|$.

2ª Risoluzione del prof. Sibirani.

Sia data un'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

in cui $a>b$. I fuochi F, F' hanno rispettivamente le coordinate

$$(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0) \qquad (\sqrt{a^2-b^2},\ 0).$$

Se M è il punto dell'ellisse di coordiuate x_1y_1, la MF incontra ulteriormente l'ellisse in un punto F_1 di coordinate

$$x_1=-\frac{(2a^2-b^2)\,x_1+2a^2\sqrt{a^2-b^2}}{2a^2-b^2+2x_1\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$y_1=-\frac{b^3\sqrt{a^2-x_1^2}}{a\,(2a^2-b^2+2x_1\sqrt{a^2-b^2})}$$

e la MF' incontra ulteriormente l'ellisse in un punto F_1' di coordinate

$$x_2=\frac{-(2a^2-b^2)\,x_1+2a^2\sqrt{a^2-b^2}}{2a^2-b^2-2x_1\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$y_2=\frac{-b^3\sqrt{a^2-x_1^2}}{a\,(2a^2-b^2-2x_1\sqrt{a^2-b^2})}.$$

Il punto M' simmetrico di M rispetto all'asse minore ha le coordinate $(-x_1,\ y_1)$ e la tangente all'ellisse in M', di equazione

$$-\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1,$$

incontra l'asse x in un punto N di coordinate

$$x_3=-\frac{a^2}{x_1} \qquad y_3=-0.$$

[1] Ciò si può vedere anche più elementarmente nel modo seguente:
Essendo μ ed F simmetrici di M ed F' rispetto al centro O, la retta μF è parallela a MF' e, indicando con μ' il punto d'incontro della μF con la MM', risulta $\mu\mu'$ divisa per metà da F, dunque $(\mu'\mu FI_\infty)$ costituiscono un gruppo armonico ed anche le rette $M(M'\mu F_1F_1')$ che proiettano quei punti da M sono armoniche. (*Nota di* G. L.)

Ora si vede immediatamente che il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

è nullo, e ciò esprime l'allineamento dei tre punti F_1, F_1', N che è quanto dovevasi dimostrare.

BIBLIOGRAFIA

SEBASTIANO CATANIA. — *Corso di Algebra elementare* ad uso delle scuole secondarie superiori. Catania, Niccolò Giannotta, edit. 1906.

È noto come, per raggiungere quell'uniformità di metodo che è dote essenziale di ogni disciplina scientifica, si cerchi oggi di fondere in un tutto armonico l'aritmetica razionale e l'algebra, togliendone la convenzionale distinzione. Opportunamente dunque il Prof. Catania ha fatto seguire all'Aritmetica (1) questo Corso d'algebra, che completa l'esposizione di un metodo (2) rimasto finora, nonostante i suoi pregi, estraneo alla scuola. Esso si compone di tre parti riunite in un sol volume per il 1° biennio d'Istituto, e distribuite per il Liceo coll'aggiunta di appendici in due volumi, che svolgono rispettivamente il programma della 1ª e quello delle ultime 2 classi.

PARTE 1ª. — I. *Numeri relativi.* — I numeri relativi o con segno (n, r), sono introdotti come simboli delle operazioni $+a$ e $-a$ (a razionale), in modo analogo a quello tenuto per i frazionari (R) e per gli stessi numeri naturali (N_0); e vengono quindi, in ultima analisi, definiti tutti coi soli segni: 0, +, —.

I concetti di uguaglianza, di maggiore e minore, di somma, ecc., sono loro estesi in modo che quando ci si riduca agli N_0 e agli R, le nuove definizioni coincidano con quelle già note. Così, due relativi x e y si dicono uguali se, essendo u un razionale conveniente (tale che $u+x$ sia ancora un R), si ha

$$u+x=u+y,$$

perchè allora sarà anche, per qualsiasi altro razionale v conveniente,

$$v+x=v+y.$$

La somma, il prodotto e la potenza sono definite in modo analogo; per es. si dice somma di due relativi x e y, un nuovo relativo z tale, che comunque si prenda un razionale u conveniente, si abbia sempre

$$u+x+y=u+z.$$

La sottrazione e la divisione sono considerate invece come operazioni inverse; e la differenza e il quoziente sono definiti per mezzo delle nozioni di numero opposto e inverso di un relativo non nullo.

Da queste definizioni, oltre le proprietà ordinarie, come la nota regola dei segni nella moltiplicazione, sono dedotte anche molte proposizioni che mancano nei comuni trattati, come quelle relative alle uguaglianze e disuguaglianze algebriche.

(1) *Aritmetica razionale* ad uso delle scuole secondarie superiori. Catania, 1904.
(2) G. PEANO, *Arithmetices principia novo methodo exposita, ecc.*

II. *Monomi e polinomi.* — Il calcolo letterale è svolto in modo breve e conforme alle parti ispirate direttamente al libro di Peano. Notevole soprattutto, è la dimostrazione, omessa in molti trattati, [1] dell'unicità dei polinomi Q e R che compariscono nella nota relazione

$$A = B \, . \, Q + R.$$

Essa è dedotta dal principio d'identità, che qui non è assunto per induzione, [2] ma stabilito in modo logicamente migliore per mezzo del seguente teorema, dimostrato assai elegantemente:

Dato il polinomio

$$f(x) = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + hx + k,$$

è sempre possibile assegnare a x *un valore positivo abbastanza grande, perchè il valore assoluto di* ax^m *superi la somma di tutti gli altri termini.* [3]

La regola di Ruffini è data anche per il caso che il divisore sia della forma $ax - b$. [4]

Le proprietà e le regole delle frazioni algebriche sono esposte col metodo semplice tenuto dal Faifofer. [5]

III. *Equazioni di 1° grado.* — Stabilite in modo chiaro le idee di variabile, di funzione e d'equazione, e premessi pochi cenni sui concetti di limite e d'infinito, l'A. espone i teoremi sull'equivalenza, fra cui un metodo per dedurre da un'equazione frazionaria contenente l'incognita al denominatore, una equivalente a forma intera.

Seguono le risoluzioni dell'equazione generale a un'incognita, e dei sistemi di 2 o n equazioni con altrettante incognite. Le formule sono discusse.

Notevoli gli esempi di sistemi indeterminati o incompatibili, che divengono determinati e risolubili, coll'assegnare valori particolari alle lettere, diverse dall'incognite, contenute in essi.

Riguardo ai problemi, non è omessa l'interpetrazione delle soluzioni negative.

Parte 2ª. — Questa parte contiene la regola d'estrazione di radice (IV), le nozioni sulle classi (V) e sui limiti (VI), le teorie dei numeri reali (VII) e dei logaritmi (VIII). [6]

Alle classi in generale, a quella delle frazioni proprie (η), e ai loro limiti superiori o inferiori, l'A. estende le cinque operazioni aritmetiche e le proposizioni relative.

L'esistenza di classi che non hanno limite superiore razionale, come quella delle radici quadrate di 2 per difetto, induce a introdurre nuovi enti (numeri irrazionali), che insieme ai razionali costituiscono i numeri reali o quantità (Q, Q_0).

Risultando essi, così, limiti di classi, son loro estesi immediatamente i concetti di uguaglianza, di disuguaglianza e delle varie operazioni, già stabiliti per i limiti razionali.

Dopo la teoria dei radicali, si accenna anche ai numeri reali negativi, e son considerate classi delle quantità relative che così si hanno, come la classe θ (comprendente η) delle quantità minori di 1.

Tutte queste considerazioni sulle classi mi sembrano, in verità, poco opportune; data la difficoltà dell'argomento, conveniva limitarsi a ciò che era stretta-

---

(1) Per es. nelle *Algebre Elementari* del Faifofer (15ª ediz. pag. 85, 86) e del Garbieri (2ª ediz., pag. 34. 39).

(2) Cfr. Capelli, *Elementi di aritmetica ragionata e algebra.* Libro III, § 20; Gazzaniga, *Libro di aritm. generale e alg. elementare*, pag. 181-186.

(3) Già pubblicato nel *Pitagora*, an. XI, n. 3-4-5. La condizione che x e a siano positivi, mi sembra superflua.

(4) Cfr. Nota di G. Sforza, *Bollettino di Matematica*, anno II.

(5) Tratt. cit., Cap. IV.

(6) Cfr. Peano, *Aritmetica generale e algebra elementare*, §§ 29-33.

mente necessario per stabilire la teoria dei numeri reali. Conveniva anche usare minor concisione e in qualche punto maggior chiarezza: perchè svolgere per es. tutta la teoria dei limiti, senza aver detto prima che cosa s'intenda per questi limiti stessi?

E la teoria delle operazioni era meglio svolgerla per tutti i numeri reali, piuttosto che per i soli limiti razionali.

Quanto all'introduzione degli irrazionali, si osserva giustamente (pag. 184) che non è necessaria la considerazione delle classi contigue, però molte ragioni, specialmente didattiche, inducono a preferire questo metodo. [1] È certo che l'A. seguendolo, avrebbe conseguito anche in questa parte, quella chiarezza che domina nelle altre.

Parte 3ª. — IX. *Equazioni quadratiche e sistemi.* — Il cenno sui numeri immaginari e complessi, [2] rende possibile la discussione completa della formula di risoluzione delle equazioni quadratiche e biquadratiche.

Sono considerate anche equazioni in cui l'incognità è implicita sotto il segno di radice.

Oltre le note proprietà delle radici, l'A. tratta del segno del trinomio

$$ax^2 + bx + c,$$

col variare di x da $-\infty$ a $+\infty$, determina la formula per la somma delle potenze simili delle radici, e ricerca il modo di comportarsi di queste radici stesse rispetto a uno o due numeri reali.

Il capitolo termina colla risoluzione di particolari equazioni e sistemi di equazioni di grado superiore al 1°. Sono utile complemento al Corso, le brevi teorie delle progressioni (X), degli interessi e annualità (XI) e delle generatrici (XII).

Le appendici contengono altri argomenti prescritti al Liceo dagli ultimi programmi, opportunamente posti a parte per non turbare l'ordine logico della trattazione.

La prima completa il programma di 1ª Liceale, contenendo un cenno sui radicali, la formula di risoluzione delle equazioni di 2° grado, le progressioni, e i logaritmi dedotti da esse, mentre nel testo (2ª, VIII) son dedotti dall'equazione esponenziale. V'è anche la definizione delle funzioni trigonometriche, insieme alle loro relazioni fondamentali.

La seconda appendice contiene un cenno sui simboli Euleriani, lo sviluppo del Binomio di Newton, e alcune nozioni di Analisi indeterminata, [3] (soluzioni intere, e soluzioni intere positive, dell'equazione $ax + by = c$). Mancano i complementi alla teoria dei numeri primi.

Numerosi e appropriati gli esercizi posti alla fine di ogni capitolo: notevoli soprattutto le applicazioni geometriche (pag. 277-288) illustrate da brevi schiarimenti.

In complesso, il libro si rivela utilissimo alla scuola, sia per il rigore logico, sia per la semplicità che gli va unita, cosa non facile nè comune; e il Prof. Catania merita ampia lode per aver compiuto attraverso difficoltà non lievi, l'ardua impresa di ridurre per l'insegnamento secondario l'ammirevole metodo di Peano.

Dott. A. Natucci.

---

(1) Cfr. "Sulla scelta del metodo per la teoria dei numeri irrazionali". *Bollettino di Matematica.* Anno IV, n. 5-6-7-8.

(2) Sono introdotti come nuovi numeri i simboli $\sqrt{-k}$, a cui sono estese le regole dei numeri reali. Avendosi

$$\sqrt{-k} = \sqrt{k} \, . \, \sqrt{-1},$$

ogni numero immaginario risulta come prodotto di un numero reale per $\sqrt{-1} = i$ (unità immaginaria).

(3) Cfr. Capelli, Elementi cit. Libro II, n. 13, 14, 19; Libro III, n. 18. Gazzaniga, Libro cit., pag. 107-112.

Roberto Marcolongo. — *Meccanica Razionale.* — (Manuali Hoepli, 2 vol. (N. 352-353 e 354-355) di pag. rispettivamente XII-271 e VI-324. — Milano, 1905).

Nella prefazione al suo trattato di " *Meccanica Razionale* „ il Prof. Marcolongo dice come egli si sia proposto di: " *presentare un quadro sintetico delle più importanti teorie della Meccanica classica e di dare anche un cenno delle più recenti....* „ Orbene; è facile scorgere con un esame anche rapido del libro in parola, come il Prof. Marcolongo abbia raggiunto egregiamente, sotto ogni rapporto, il fine propostosi.

Egli invero ha studiati, con una trattazione informata ai metodi più moderni ed eleganti, i problemi principali della Meccanica razionale, disponendoli in ordine perfettamente logico. Nel far ciò egli prese a base le ricerche classiche dei grandi luminari Keplero, Euler, Lagrange, Poisson ecc., che gettarono le basi dello studio matematico della scienza del movimento dei corpi, giungendo in pari tempo a dare cenni degli studi più recenti, quali quelli di Ball, Klein e Sommerfeld ecc.

La fusione delle ricerche, per così dire, classiche con quelle più moderne, fu fatta in modo così armonico e perfetto che il libro del Marcolongo si presenta come un tutto organico ed omogeneo.

Come dice l'A., pure nella prefazione, egli si propose, col suo trattato, di riassumere, in gran parte, le lezioni da lui svolte nell' Università di Messina: se non che alla materia che ordinariamente si svolge nei nostri corsi di Meccanica razionale, egli molto opportunamente pensò di aggiungere nel suo libro, qualche cenno su taluni argomenti che possono risguardarsi come costituenti un' introduzione alla Meccanica superiore ed alla Fisica Matematica.

L'A. ebbe pure l'ottima idea di aggiungere ad ogni capitolo un buon numero di esercizi egregiamente scelti, i quali servono a mettere meglio in luce la portata delle varie teorie svolte, indicando allo studioso il modo di applicarle. Molti di questi esercizi servono pure mirabilmente a dare un' idea di taluni argomenti speciali che, pur essendo importantissimi, non potevano, a motivo dei limiti nei quali doveva essere contenuto il libro, far parte vera e propria della materia svolta. Tutti questi pregi del trattato in parola risulteranno meglio dall'esposizione sommaria alla quale ora procederemo degli argomenti studiati dal Marcolongo.

L'opera è, giusta la consuetudine generalmente seguita, divisa in tre parti principali, dedicate rispettivamente alla Cinematica, alla Statica, alla Dinamica.

La prima parte è forse, per l' indole sua stessa, quella nella quale si nota di più la modernità dei metodi usati dall'A. Invero molto opportunamente, nella sua trattazione, egli si vale sin dall' inizio dei metodi del calcolo vettoriale. Sono ben noti i vantaggi che presenta l'uso di questo metodo, in quanto esso permette di dare alle formole maggiore eleganza e semplicità.

All'esposizione pertanto dei principi del calcolo vettoriale è dedicato il primo capitolo del libro in esame. I primi §§ del capitolo (1-5) contengono le definizioni e i concetti fondamentali relativi ai vettori: in un successivo § ne è esposta l'applicazione allo studio delle curve piane e gobbe.

I §§ successivi del capitolo sono dedicati all'esposizione dei concetti di vettori applicati e localizzati, di coppia, di vettore e coppia risultante, di movimenti d'una coppia ecc. È ovvio come da questi concetti si passi in modo assai facile e chiaro alla rappresentazione dei concetti fondamentali della meccanica. Nel secondo capitolo l'A. getta le basi della Cinematica, studiando i caratteri fondamentali dei principali tipi di movimenti, dopo aver dati i concetti di velocità ed accelerazione. Notevole per l'eleganza e la chiarezza è il modo col quale nel § 3 di questo capitolo l'A. espone i caratteri geometrici del moto curvo, fondendo felicemente i concetti relativi allo studio analitico delle curve coi concetti meccanici dei quali viene ad occuparsi.

Il capitolo terzo è dedicato all'analisi del moto finito d'un sistema rigido e allo studio della composizione dei moti finiti. Nelle formole relative alla trattazione di quest'argomento l'A. si vale opportunamente di variabili complesse: indi, dopo aver tenuto parola dei classici angoli Euleriani, egli introduce i *parametri razionali*, il cui uso permette di esprimere con molta eleganza i coseni direttori che legano le due terne di assi che si vengono a considerare.

Nel capitolo successivo è studiato il moto istantaneo di un sistema rigido. Mercè le notazioni proprie del calcolo vettoriale si deducono qui in modo molto elegante le formole di Poisson (§ 3) e le altre relative alla composizione dei moti istantanei e simultanei.

Nel capitolo quinto, dedicato allo studio del moto continuo di un sistema rigido, emerge in modo particolare il felice uso della rappresentazione geometrica, la quale serve ad interpretrare ottimamente i risultati del calcolo. I concetti di centro istantaneo di rotazione, di centro delle accelerazioni, di cerchio dei flessi, la formola di Euler-Savary sono esposti in modo molto chiaro e felice. Le teorie qui trattate sono poi illustrate, negli ultimi §§ del capitolo con applicazioni a casi particolari interessanti. Una di tali applicazioni si riferisce al moto continuo di un sistema rigido intorno ad un punto fisso che l'A. ha cura di caratterizzare, valendosi pure degli elegantissimi parametri dei signori Klein e Sommerfeld. Con questo capitolo si chiude la prima parte del libro del Marcolongo.

La seconda parte, dedicata, come si disse, alla Statica, è divisa in tre capitoli, i quali trattano rispettivamente della composizione delle forze, del principio dei lavori virtuali e dell'equilibrio delle curve funicolari. Notevole nel primo capitolo è il modo con cui l'A. pone in relazione l'equivalenza fra i sistemi di forze e di vettori. Nel capitolo successivo l'A., dopo aver date le idee fondamentali intorno agli spostamenti virtuali, tratta della distinzione dovuta a Hertz dei sistemi in olonomi e anolonomi e del principio dei lavori virtuali, ponendo in rilievo la portata di quest'ultimo con l'aiuto pure di numerosi esempi.

La terza parte (Dinamica) occupa per intero il secondo volume del trattato del Marcolongo. L'esposizione delle leggi fondamentali del moto forma oggetto del primo capitolo di questa parte. Oltre a dare queste tre leggi, l'A. espone pure l'importante concetto di impulso (e forza istantanea) e tratta di alcuni problemi speciali classici (moto d'un punto libero, d'un grave in un mezzo resistente, d'un punto attratto secondo la legge di Newton, d'un proiettile).

Nel secondo capitolo, dedicato allo studio di vari problemi intorno al moto di un punto risalta il modo chiaro ed elegante, col quale l'A. deduce le tre leggi di Keplero e col quale tratta i problemi intorno al moto del pendolo nei vari casi che si possono presentare. Il capitolo successivo incomincia con l'esposizione del principio di D'Alembert e con la deduzione da questo dell'equazione fondamentale della meccanica. Dopo aver trattato delle equazioni di Lagrange nella loro prima e nella seconda forma, l'A. accenna pure alle equazioni di Appell. Finalmente egli tratta eziandio, per quanto succintamente, delle equazioni di Hamilton, valendosi qui della considerazione degli impulsi. Con ciò si può dire che il Marcolongo conduce il lettore alla soglia della Meccanica superiore, in quanto viene a considerare un argomento, illustrandolo pure con un esercizio (pendolo sferico), che esce forse dal quadro d'un corso di Meccanica Razionale.

Nel capitolo successivo sono definiti e studiati i concetti di lavoro, energia e di funzione potenziale, e sono esposte le loro principali proprietà. Nel parlare, in questo capitolo, dei sistemi conservativi l'A. mostra quale sia l'interpretazione o, meglio, la giustificazione necessaria del concetto di *forza relativa ad una delle coordinate generali d'un sistema dinamico*. Seguono poi i teoremi fondamentali della conservazione dell'energia, del centro di massa e delle aree. Il capitolo si chiude con la definizione di azione e con l'esposizione del noto teorema di Jacobi e di quelli della minima azione e del minimo sforzo.

Il capitolo quinto, dedicato alla dinamica dei sistemi rigidi, oltre ai concetti d'indole generale necessari allo studio dell'argomento, contiene in particolare una bella esposizione della teoria del moto d'un corpo rigido intorno ad un punto fisso. L'A. passa così in rivista i vari casi in cui il problema è risolvibile per quadrature. Qui pure l'esposizione e le formole sono rimarchevoli per chiarezza ed eleganza. Lo studio della percossa in un punto rigido, con un cenno sulle ricerche del Ball, e lo studio del problema dell'urto di due corpi chiudono degnamente questo capitolo, col quale termina la meccanica dei corpi rigidi.

Il capitolo successivo, dedicato allo studio della funzione potenziale newtoniana, con speciale riguardo all'attrazione degli ellissoidi, costituisce, a mio debole avviso, una della parti migliori del libro di Marcolongo; e merita pertanto d'essere segnalato in modo particolare. In esso l'A., dopo avere esposti alcuni concetti fondamentali sulla funzione potenziale connettendole a cose dette in un precedente capitolo, dà successivamente il calcolo dell'attrazione d'uno strato sferico, d'un omoeide sia omogeneo, sia decomponibile in strati omogenei. Egli qui, seguendo la via tracciata da Thomson e Tait nella loro " Natural Philosophy ", si vale di metodi semplici e diretti i quali contrastano con i metodi complicati, usati da molti autori nel trattare il medesimo problema. Calcolati poi l'attrazione ed il potenziale d'un ellissoide omogeneo, il prof. Marcolongo deduce in modo assai semplice e piano i teoremi di Mac Laurin e Chasles, oltre ad altre proposizioni fondamentali relative all'attrazione. Negli esercizi relativi a questo capitolo l'A. tratta di problemi riferentisi all'attrazione e alla funzione potenziale di alcuni corpi semplici, che presentano particolare interesse.

Il capitolo settimo, ultimo del libro, tratta della idromeccanica. In esso, dopo aver parlato dell'equilibrio dei fluidi l'A. dà le equazioni del moto dei fluidi nelle due forme di Eulero e Lagrange, trattando pure degli integrali di Cauchy. Allo studio dei moti non vorticosi egli fa seguire quello dei moti vorticosi, chiudendo il capitolo coi teoremi di Helmoltz.

Fra gli esercizi relativi a questo capitolo l'A. ebbe la felice idea di concluderne qualcuno (1°-6°) riferentesi al problema della figura d'equilibrio d'una massa fluida ruotante uniformemente. Qui egli dà pertanto un cenno sugli ellissoidi di Mac Laurin e di Jacobi. Questi esercizi costituiscono così un degno complemento del penultimo capitolo del libro, in quanto assieme con questo vengono a dare al lettore un'idea chiara di problemi di capitale importanza relativi all'applicazione della Meccanica all'Astronomia e alla Geodesia.

Un lato assai saliente del libro è costituito dalle numerose note storico-bibliografiche che si trovano, si può dire, ad ogni passo.

In queste note l'A. dà non solo notizie preziose per chi voglia approfondire i singoli argomenti considerati nel trattato, indicando gli autori che in modo speciale se ne occuparono, ma fornisce eziandio larghe notizie di carattere storico, le quali pongono il lettore in grado di vedere come si vennero formando e sviluppando le varie teorie della meccanica, in guisa che egli possa meglio penetrarne lo spirito. Molto giustamente l'utilità di tali notizie storiche è affermata dall'A. stesso nell'introduzione.

Riassumendo quanto fu ora esposto, mi sembra che ben si possa affermare che il prof. Marcolongo rese col suo trattato un segnalato servigio a tutti gli studiosi della Meccanica razionale, in quanto il trattato in parola sarà, senza dubbio, utilissimo allo studente il quale per la prima volta imprende lo studio di tale scienza, e sarà al tempo stesso consultato con sommo vantaggio da chi sia chiamato ad insegnarla.

A. Viterbi
Mantova.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 10 novembre 1905

GIORNALI CHE FANNO IL CAMBIO COL "PERIODICO DI MATEMATICA„

Italiani:

Atti della R. Accademia di Bologna.
Atti della R. Accademia di Napoli.
Atti del R. Istituto Veneto.
Atti dell' Accademia pontaniana (Napoli).
Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze matematiche (Torino).
Giornale di Battaglini (Napoli).
Il Monitore Tecnico (Milano).
Il Nuovo Cimento (Pisa).
La Rassegna tecnica (Messina).
La Rivista tecnica (Torino).
La Rivista tecnica italiana (Roma).
La Scuola Secondaria Italiana (Milano).
L'eco degli Ingegneri e Periti agrimensori (Pescia).
Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.
Rivista agricola industriale (Roma).
Rivista di Matematica (Torino).
Rivista Marittima (Roma).

Stranieri:

American Journal of Mathematics (Baltimore).
American mathematical Monthly (Kidder).
Annals of matematics (Cambridge-Mass).
Bibliotheca mathematica (Leipzig).
Bulletin de la Société mathématique de France (Paris).
Bullettin de la Société phisico-mathématique de Kasan (Kasan).
Bullettin of the American mathematical Society (New-York).
Communications de la Société Mathématique de Kharkow (Kharkow).
Gaceta de matemàticas elementales. Vitoria (Spagna).
Intermédiaire des Mathématiciens (Paris).
Jahresberichte der Deutschen mathematiker Vereinigung (Berlin).
Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas (Coimbra).
Journal de mathématiques élémentaires par H. Vuibert (Paris).
L'Education mathématique par I. Griess et H. Vuibert (Paris).
L'Enseignement mathém., revue internationale par Laisant et Fehr (Paris).
Mathematical Gazette (London).
Mathesis (Gand).
Memorias de la Sociedad çientifica Antonio Alzate (Mexico).
Niew Archief voor wiskunde (Amsterdam).
Nouvelles annales (Paris).
Proceedings of the London mathematical society.
Report of the National Museum (Washington).
Report of the Smithscnian Institution (Washington).
Revista trimestral de matemáticas (Zaragoza).
Revue semestrielle des publications mathématiques (Amsterdam).
The annals of mathematics (Cambridge-Massachusset).
The Proceedings and Transactions of the Nova Scotian Institute of Science (Halifax, Nova Scotia).
Transactions of the Texas Academy of Science (Austin).
Viadomosci matematycznych (Warszawa).
Vèstnik òpitnoi Fisiki i elementarnoi Matemàtichi. Isdavaemii V. A. Ghernietom. Pod redaktsiei V. A. Zimmermana. Odessa (Russia).
Zeitschrift für math. und naturws. Unterricht (Leipzig).
Wiskundig Tijdschrift (Rotterdam).

CONDIZIONI DI ABBONAMENTO

AL

PERIODICO DI MATEMATICA

		Italia	Estero
Periodico di matematica	L.	8	9
Supplemento al Periodico di matematica . . .	„	2	2,50
Periodico e Supplemento	„	9,50	11

Non si fanno altro che abbonamenti annui decorrenti dal 1° luglio al 30 giugno dell'anno successivo.

Per accordi presi col Presidente dell'Associazione “ Mathesis „ i signori soci di quest'Associazione potranno avere l'abbonamento al *Periodico di Matematica* al prezzo di L. **6** (in aggiunta alla quota sociale, pure di L. 6), **pagato anticipatamente** al Segretario dell'Associazione, prof. **Gaetano Riboni**, *Via Vittoria 53, Milano.*

ANNO XXI — NOVEMBRE-DICEMBRE 1905 — FASC. III

PERIODICO DI MATEMATICA

PER

L' INSEGNAMENTO SECONDARIO

fondato da DAVIDE BESSO, continuato da AURELIO LUGLI

ED ATTUALMENTE DIRETTO

DAL

PROF. GIULIO LAZZERI

SERIE III — VOLUME III

SOMMARIO:

LIVORNO

TIPOGRAFIA RAFFAELLO GIUSTI

1905

LIBRI ED OPUSCOLI RICEVUTI DALLA DIREZIONE

AMODEO. — *Vita matematica napoletana.* Studio storico, biografico, bibliografico. Parte prima. Napoli, Giannini e figli, 1905.

CIAMBERLINI. — *Su alcune proposizioni relative alla simiglianza geometrica.* (Bollettino di Matematica, 1905).

DEL RE. — *Sulle focali di Minding.* (Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, 1905).

FERRARI A. — *Intorno allo spezzamento delle linee parallele alle curve piane algebriche.* (Idem, 1905).

GARBIERI. — *Teoria dei determinanti.* Riassunto di lezioni date nelle Università di Padova e di Genova. Torino, Paravia e C., 1904.

— — *Sistemi di equazioni lineari.* Riassunto di lezioni date nell' Università di Genova. Bologna, Damorani e Albertazzi, 1901.

GOMES TEIXEIRA. — *Tratado de las curvas especiales notables.* Memoria premiada por la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales de Madrid, y publicada por la misma Academia. Madrid, imprenta de la « Gaceta de Madrid », 1905.

HORN. — *Gewöhnliche Differentialgleichungen belibiger Ordnung.* Leipzig, Göschen, 1905.

MAGRINI. — *Corso di disegno geometrico per le scuole secondarie,* con 280 figure intercalate nel testo. Bologna, Pongetti, 1905.

MARLETTA. — *Sulle quintiche gobbe razionali.* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1905).

NATUCCI. — *Sull'estensione di un teorema di Clebsch.* (Giornale di Matematica di Battaglini, 1904).

— — *Sull'estensione del teorema di Desargues.* (Idem, 1904).

PASCAL. — *Programmi e riassunti di corsi universitari.* Università di Pavia. Corsi di analisi superiore tenuti negli anni 1903-04 e 1904-05. (Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche, 1905).

PESCI. — *Sobre nomografia elemental.* (Revista trimestral de Matematicas, 1905).

SEVERI. — *Sulle curve algebriche virtuali appartenenti ad una superficie algebrica.* (Rendiconti del R. Ist. Lombardo di Sc. e Lett., 1905).

WIELEITNER. — *Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung.* Leipzig, Göschen, 1905.

SULLA COMPOSIZIONE DELLE FORZE NELLO SPAZIO

È noto che per comporre un sistema di forze qualunque si possono usare vari metodi, fra i quali i più noti sono quello *dei tre punti,* quello della *piramide funicolare,* quello della *rete funicolare,* quello del *piano trasversale e del centro di riduzione.*

Quest'ultimo, come è noto, consiste in questo. Dato un sistema di forze f_i, si scelga ad arbitrio un punto arbitrario O ed un piano π. Detta A_i la traccia della retta di f_i sul piano π, il piano Of_i taglia π secondo una retta r_i passante per A_i, e si può scomporre f_i in una forza p_i sulla r_i ed in una q_i sulla OA_i. Tutte le forze p_i situate in π si compongono in generale in una forza p, e tutte le forze per O si compongono in una forza q; così il sistema è ridotto a due forze.

Si possono avere costruzioni speciali, dando ad O ed a π posizioni particolari. Per esempio, se π è il piano all'infinito, il metodo sopra indicato si riduce a trasportare tutte le forze date in un punto O e nel comporre poi tutte le forze trasportate in O e tutte le coppie derivanti dal detto trasporto.

Il sistema si riduce così ad una forza applicata in O, rappresentata da un segmento equipollente alla somma geometrica dei segmenti che rappresentano le forze componenti, ed in una coppia che ha per asse-momento la somma geometrica degli assi-momenti di O rispetto alle componenti.

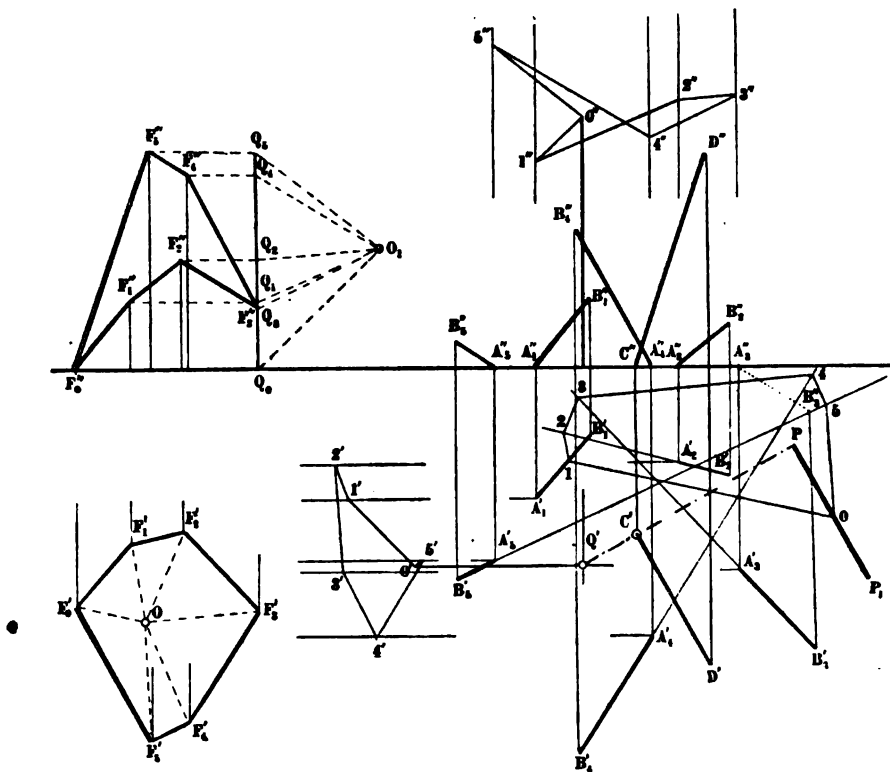
Tutti i vari procedimenti sopraindicati per la composizione delle forze nello spazio si possono attuare per mezzo delle rappresentazioni coi metodi della geometria descrittiva; ma riescono assai laboriosi e lunghi.

Il procedimento al quale meglio si applica il metodo di Monge, è quello del piano trasversale e del centro di riduzione, quando il piano trasversale è uno dei piani di proiezione ed il centro di riduzione è il punto all'infinito della retta perpendicolare a tale piano.

Siccome questa costruzione è appena accennata nei più diffusi trattati di statica grafica, ho creduto non del tutto inutile questa nota destinata ad esporla con qualche dettaglio insieme con la discussione relativa ad essa.

Sebbene la cosa non presenti difficoltà, mi lusingo che possa avere qualche pratica utilità.

1. Sieno date n forze f_i individuate per mezzo delle loro proiezioni su due piani ortogonali, e supponiamo da prima che il segmento equipollente alla somma geometrica dei segmenti che rap-

presentano le f_i non sia nullo, e per conseguenza almeno una delle sue proiezioni non sia nulla. Anzi con uno spostamento di piani di riferimento, potremo supporre che ambedue le proiezioni suddette non siano nulle.

Nell'annessa figura abbiamo supposto che le forze date siano cinque; $A'_iB'_i$, $A''_iB''_i$ sono le proiezioni delle rispettive linee di azione, A'_i, A''_i le proiezioni della prima traccia; a parte poi sono disegnate le due proiezioni $F'_0F'_1F'_2F'_3F'_4F'_5$, $F''_0F''_1F''_2F''_3F''_4F''_5$

di un poligono delle forze, cioè avente i suoi lati equipollenti alle forze stesse. È chiaro che i lati di chiusura $F'_0F'_5$, $F''_0F''_5$ determinano la direzione principale del sistema.

È opportuno osservare che per poter fare il disegno occorre che le traccie omonime, per es. le prime, sian tutte nel piano del disegno. Qualora fossero troppo lontane l'una dall'altra si potrà immaginare spostato quanto occorre il primo piano di proiezione parallelamente a sè stesso, il che si effettuerà assai rapidamente spostando la linea di terra.

Ogni forza f_i può essere scomposta in una forza p_i situata nel primo piano di proiezione ed in una q_i perpendicolare ad esso. La p_i avrà per linea d'azione la $A'_iB'_i$, la q_i passerà per la traccia A'_i. Il poligono delle forze p_i è il poligono $F'_0\,F'_1\,F'_2\ldots$, quello delle q_i è $Q_0Q_1Q_2\ldots$, essendo Q_0, Q_1, $Q_2\ldots$, le proiezioni dei vertici F''_0, F''_1, $F''_2,\ldots$ sopra una perpendicolare alla linea di terra.

Ciò posto per mezzo di un poligono funicolare 0 1 2... si determina la risultante delle forze p_i, e per mezzo di due poligoni funicolari 0′ 1′ 2′..., 0″ 1″ 2″... si determina il baricentro Q′ delle forze q_i applicate ai punti A'_i.

In tal guisa il sistema di forze è ridotto ad una forza $p = F'_0F'_5$ nel primo piano di proiezione ed in una $q = Q_0Q_5 = \Sigma q_i$ applicata in Q′ perpendicolare ad esso.

Trasformato così il sistema, è facile risolvere i più importanti problemi ad esso relativi.

2. Problema. — *Determinare l'asse-momento della coppia che nasce trasportando tutte le forze del sistema in un punto.*

Per il punto C′ dato si conduca la parallela alla direzione principale e si trovi la sua prima traccia; poichè il momento della coppia che si ottiene prendendo per centro di riduzione un punto C non varia se C si sposta nella direzione principale, possiamo determinare il momento relativo alla traccia suddetta.

Ciò premesso, sia D′ la traccia. Trasportando in D′ la p avremo una coppia di asse-momento eguale al prodotto di p per la distanza di D′ dalla retta di essa, che ridotto ad una base arbitraria si dovrà riportare perpendicolarmente al primo piano di proiezione. Trasportando q in D′ nasce una coppia il cui asse momento eguale a $D'Q' \times q$ deve esser portato, ridotto alla stessa base, sul primo piano di proiezione perpendicolarmente a D′Q′. Ciò fatto, la composizione dei due assi-momenti non offre difficoltà alcuna.

3. Problema. — *Determinare l'asse principale del sistema di forze* f_i.

È noto che l'asse principale è la retta, parallela alla direzione principale, luogo dei punti pei quali il momento del sistema è minimo, oppure dei punti pei quali l'asse-momento è parallelo alla direzione principale stessa. È pure noto che esso incontra la retta che rappresenta la minima distanza fra due rette reciproche qualunque ed è perpendicolare ad essa.

L'asse principale cercato deve dunque passare per un punto della retta Q'P, minima distanza fra le due rette reciproche contenenti p, q, in un punto C', che può esser facilmente determinato colle considerazioni seguenti.

Siano x, y le sue distanze da P e da Q', e $d = Q'P$, di guisa che sarà $x + y = d$. I momenti di p, q rispetto a C' sono eguali rispettivamente a xp, yq e gli assi-momenti relativi sono perpendicolari fra loro, perchè il primo è perpendicolare al primo piano di proiezione, il secondo giace in quello, perciò il quadrato del momento M del sistema rispetto a C' è

$$M^2 = p^2x^2 + q^2y^2 = p^2x^2 + q^2(d-x)^2,$$

ossia

$$M^2 = (p^2 + q^2)x^2 - 2q^2d \, . \, x + q^2d^2.$$

Per conseguenza

$$\frac{d(M^2)}{dx} = 2\left[(p^2+q^2)x - q^2 d\right],$$

$$\frac{d^2(M^2)}{dx^2} = 2(p^2+q^2).$$

Per

$$x = \frac{q^2}{p^2+q^2} d$$

si ha

$$\frac{d(M^2)}{dx} = 0 \qquad \frac{d^2(M^2)}{dx^2} > 0,$$

e quindi M^2 è minimo. In conclusione il punto C' per il quale deve passare l'asse principale del sistema è determinato dalle seguenti condizioni

$$x = \frac{q^2}{p^2+q^2} d, \qquad y = \frac{p^2}{p^2+q^2} d;$$

e quindi

$$\frac{x}{y} = \frac{q^2}{p^2}.$$

L'asse principale dunque divide PQ' in parti inversamente proporzionali ai quadrati delle forze p, q.

Si giunge facilmente allo stesso risultato anche senza fare uso del calcolo, colle seguenti considerazioni semplicissime. Trasportando in un punto C′ di PQ′ le forze p, q, gli assi-momenti che nascono sono xp, yq e sono rispettivamente paralleli a q, p. Affinchè la risultante delle due forze p, q sia parallela all'asse-momento risultante dei due yq, xp è dunque necessario e sufficiente che sia

$$\frac{yq}{xp}=\frac{p}{q},$$

ossia

$$\frac{x}{y}=\frac{q^2}{p^2}.$$

Basta dunque costruire il triangolo rettangolo che abbia i suoi cateti eguali a p e q. Le proiezioni di questi sull'ipotenusa sono proporzionali ai quadrati di p, q, e per conseguenza se si divide $Q'P=d$ in parti proporzionali alle proiezioni suddette, avremo i segmenti x, y e quindi il punto C′.

4. Problema. — *Trovare il momento di un sistema di forze rispetto ad una retta arbitraria.*

Supposto di aver ridotto, come nel § 1, il sistema a due forze p, q l'una situata nel primo piano di proiezione, l'altra ad essa perpendicolare, il momento del sistema rispetto ad una retta r è uguale alla somma dei momenti di p, q rispetto ad r.

Sia M′M″ la prima traccia di r, e prendiamo su r un segmento MN uguale all'unità. Il momento di p rispetto ad r è sei volte il volume del tetraedro che ha per spigoli opposti MN e p; la misura della base $M'p$ di questo tetraedro è $\frac{1}{2}p\,.\,d$, essendo d la distanza di M′ dalla retta di p; la sua altezza è N_0N'', dunque il momento di p rispetto ad r è

$$p\,.\,d\,.\,N_0N''$$

ossia è uguale al *momento del sistema di forze* p_1 *rispetto alla prima traccia della retta* r, *moltiplicata per la proiezione del segmento unità, appartenente alla* r, *fatta sopra una retta perpendicolare al primo piano di proiezione.*

Il momento della q rispetto ad r è sei volte il volume del tetraedro che ha per spigoli opposti q ed $MN=1$ (sulla r) e questo tetraedro è equivalente a quello che ha per spigoli opposti M′N′ e q. Essendo h la distanza di Q′ dalla prima proiezione M′N′ di r, la base Q′M′N′ di questo tetraedro ha per misura $\frac{1}{2}h\,.\,M'N'$ e l'altezza di essa è q, dunque il momento di q rispetto ad r è

$$M'N'.\,h\,.\,q$$

ossia è uguale al *momento del sistema di forze parallele* q_i *applicate nei punti* A'_i *rispetto alla prima proiezione della* r, *moltiplicata per la prima proiezione del segmento unità dato sulla* r.

Trovati i due momenti di p, q, si trova il momento del sistema facendo la somma algebrica di essi.

5. Nei §§ precedenti abbiamo supposto che la somma geometrica delle f_i non sia nulla e non siano nulle nemmeno le proiezioni sui due piani di rappresentazione.

Conservando l'ipotesi che la somma geometrica delle f_i non sia nulla, può avvenire che una sola delle sue proiezioni sia nulla, nel qual caso l'altra proiezione è uguale alla somma stessa. In altre parole può avvenire che una delle poligonali $F'_0 F'_1 \ldots F'_n$, $F''_0 F''_1 \ldots F''_n$ sia chiusa.

1°. Supponiamo che sia chiusa la poligonale $F'_0 F'_1 \ldots F'_n$ ed aperta la $F''_0 F''_1 \ldots F''_n$. Procedendo esattamente come nel § 1, troveremo per risultante delle forze p_i una coppia coll'asse-momento perpendicolare al primo piano di proiezione, e come risultante delle q una forza perpendicolare al piano stesso. Ne segue che la retta di quella risultante è senz'altro l'asse principale del sistema.

2°. Supponiamo che sia chiusa la poligonale $F''_0 F''_1 \ldots F''_n$ ed aperta la $F'_0 F'_1 \ldots F'_n$. In questo caso le p_i si compongono, come nel § 1, in una sola forza p per mezzo di un poligono funicolare; e le q_i, essendo $\Sigma q_i = 0$, si compongono in una coppia situata in un piano perpendicolare al primo piano di proiezione, del quale si può determinare la prima traccia nel modo seguente.

Scelta una qualunque delle q_i, per esempio la q_n, le rimanenti si devono comporre in una forza uguale ed opposta alla q_n medesima, applicata nel baricentro K, degli $n-1$ punti $A'_1, A'_2 \ldots A'_{n-1}$ affetti da coefficienti proporzionali alle $q_1, q_2 \ldots q_{n-1}$. La traccia del piano contenente la coppia risultante dalle $q_1, q_2 \ldots q_n$ è dunque la KA'_n e il suo asse-momento è perpendicolare a KA'_n sul primo piano di proiezione. Si determina facilmente la grandezza di questo momento, ridotto ad una data base uguale alla $p = F'_0 F'_n$, per mezzo del poligono funicolare già costruito.

Ridotto così il sistema ad una forza p nel primo piano di proiezione e ad una coppia, il cui asse-momento è situato nello stesso piano, potremo scomporre quest'asse-momento in due, uno parallelo e l'altro perpendicolare a p. Quest'ultimo si compone con p ed ha per effetto di spostare p parallelamente a sè stessa normal-

mente al primo piano di proiezione di una di distanza uguale a quell'asse-momento (poichè si è preso p per base di riduzione).

Così troveremo l'asse principale che ha per prima proiezione la p e per seconda la parallela alla linea di terra ad una distanza da essa, uguale all'asse-momento sopra indicato.

6. Se ambedue i poligoni $F'_0 F'_1 \ldots F'_n$, $F''_0 F''_1 \ldots F''_n$ sono chiusi, e quindi anche il poligono obiettivo delle f_i è chiuso, le p_i si compongono in una coppia situata nel primo piano di proiezione, e quindi coll'asse-momento ad esso perpendicolare, le q_i pure si compongono in una coppia situata in un piano perpendicolare al primo piano di proiezione, la cui traccia su di essa si determina come nel § precedente. La composizione di queste due coppie non presenta difficoltà.

G. Lazzeri.

SULL'INSEGNAMENTO DELLA STORIA DELLE MATEMATICHE IN RUSSIA

Di fronte al risveglio delle ricerche storiche, ed all'interesse generale che ai nostri giorni desta lo studio delle varie discipline nella loro storica evoluzione, le scienze esatte, e particolarmente le scienze matematiche, non potevano restare del tutto estranee a quest'ordine di studii; e benchè in esse sia sentito meno che in altre scienze il bisogno di risalire ai precedenti storici, pur tuttavia è certo che la conoscenza delle indagini e dei risultati del passato può in varii casi essere utile a completare e ad approfondire le cognizioni e le indagini presenti; ed è poi innegabile che, per la storia della cultura generale, e quindi della civiltà, è necessario conoscere quale sia stato, nel tempo, il cammino fatto dall'attività intellettuale umana in quest'importantissimo ramo del sapere.

In Italia, dopo l'opera del Libri (che, quantunque pubblicata in Francia ed in lingua francese, è tuttavia nostro vanto, essendo l'autore fiorentino) la storia delle matematiche era stata lasciata in abbandono; ma in questi ultimi tempi anche fra noi si nota un risveglio: da varii anni il Favaro ne fa argomento d'un corso facoltativo all'Università di Padova; il Loria, dell'Università di Genova, si occupa con molto frutto di questi studii; a Pisa il Lazzeri ed a Torino il Vailati hanno svolto dei corsi liberi di storia della geometria e di

storia della meccanica; ultimamente l'Amodeo ha conseguito, a Napoli, la libera docenza in storia delle matematiche; e questi studii formarono argomento di discussioni e di relazioni nel II Congresso storico internazionale che fu tenuto, nel 1903, a Roma. Più ancora si è fatto nelle altre nazioni, in diverse delle quali questa disciplina ha una cattedra ufficiale; e sono note a tutti le lezioni che ne dettano il Cantor, il Mansion, il Rouse Ball. Anche in Russia, dove fioriscono così valenti cultori delle scienze matematiche, queste si sono cominciate a studiare nel loro svolgimento storico; ma poichè, per la poca diffusione che ha fra noi la lingua russa, poco o nulla si sa di quello che in questa materia colà si è fatto, così credo che possa riuscire utile agli studiosi il dar notizia del corso libero di storia delle matematiche che da poco più di 20 anni svolge, nell'Università di Mosca, il professor Bobynin e pubblicare la traduzione del programma da lui svolto varii anni fa. (1) Il Bobynin divide il suo corso in due parti, che tratta contemporaneamente, dedicando a ciascuna un'ora di lezione per settimana; nella prima parte si occupa della storia delle matematiche nell'evo antico e nel Medio Evo; nella seconda tratta della storia delle matematiche nell'evo moderno. Egli si propone di completare, in seguito, questo corso generale con un corso speciale della storia dello sviluppo delle matematiche in Russia, e ne va, per ora, raccogliendo il materiale.

Il programma del quale pubblico la traduzione, fu svolto a Mosca negli anni accademici 1888-89 e 1889-90; e fu pubblicato nel giornale *La scienza fisico-matematica nel suo presente e nel passato.*

Nel pubblicare il programma l'ho modificato solo lievissimamente in qualche punto che non sarebbe riuscito chiaro senza aver presente tutto il corso com'è stato svolto. Il Bobynin ha cominciato, qualche anno dopo, a pubblicare, nella stessa Rivista sopra citata, le sue lezioni, allontanandosi però alquanto dal programma; ma non avendo potuto avere che alcuni fascicoli, contenenti solo una parte del corso, non posso darne qui nemmeno un rapido cenno. Soltanto osservo che sarebbe forse da desiderare, in qualche punto, un'esposizione meno astrusa e più chiara; mentre, d'altra parte, è commendevole il fatto che il Bobynin non solo tiene conto di tutto quanto i principali trattatisti hanno scritto in materia, ma altresì pone a profitto le monografie e le scoperte ulteriori, quali, per esempio, quella del papiro di Rinda (di cui il Bobynin si occupa largamente) e che venne pubblicato nel 1877 dall'*Eisenlohr* nel suo scritto " *Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter* „.

---

(1) Mi è grato qui ringraziare il chiarissimo prof. Menzbier, ordinario di anatomia comparata nell'Università di Mosca, per mezzo del quale ho potuto procurarmi il programma del professor Bobynin.

Programma del corso di storia delle matematiche svolto negli anni accademici 1888-89 e 1889-90 nell'Università di Mosca dal libero docente V. V. Bobynin.

STORIA DELLE MATEMATICHE NELL'EVO ANTICO E NEL MEDIO EVO

Lezione I.

Introduzione.

Scopo della storia delle matematiche e sua importanza: *a*) filosofica (problemi di filosofia matematica e loro importanza per la storia stessa della scienza); *b*) scientifica (guida ai lavori di ricerca); *c*) pedagogica; *d*) per la cultura generale. — Inizio degli studii di storia delle matematiche. Breve rassegna delle condizioni della letteratura storico-matematica nell'evo antico, nel medio evo e nell'evo moderno.

EPOCA ANTERIORE AL PERIODO SCIENTIFICO

Lezione II.

Origine e primo sviluppo della numerazione parlata.

Sviluppo generale e particolare delle nozioni relative alla formazione dei primi numeri. Sviluppo mimico della numerazione. Posteriore apparizione della numerazione parlata. Trasformazione della numerazione fatta con le dita in numerazione parlata. Ulteriore sviluppo della numerazione in seguito alla formazione del numero 20.

Lezione III.

Origine dei sistemi di numerazione.

Problema fondamentale della numerazione parlata e sua risoluzione spontanea derivante dalla natura degli oggetti. Sistemi di numerazione a base 5, 10 e 20. Forme dei nomi dei numeri in questi sistemi. Sviluppo dell'idea delle unità di differenti ordini. Nomi di queste unità. Limiti della numerazione raggiunti nelle diverse nazioni. Sistemi artificiali di numerazione.

Lezione IV.

Origine e primo sviluppo della numerazione scritta.

Prima applicazione dell'idea della scrittura alla numerazione. Calcolo con pietre o con oggetti. Numerazione coi nodi. Sua condizione

presso i Cinesi. Tavola di Lo-sciu. Sua condizione presso i Peruviani: *Kvipuss* (il cordone). Forma grafica della numerazione: tacche, scrittura figurata degli Indiani dell'America settentrionale: scrittura geroglifica dei popoli civilizzati dell'America centrale.

Lezione V.

Numerazione scritta nel suo stadio più progredito.

Stato raggiunto dalla numerazione scritta nelle forme più progredite della scrittura. Principii generali dei sistemi con cifre (alcuni ancora vigenti ed alcuni antiquati). Metodi dell'indicazione dei numeri coi multipli delle unità di vario ordine, negli antichi e nei nuovi sistemi con cifre: 1° metodo dell'indicazione non sistematica; 2° additivo; 3° moltiplicativo; 4° con esponenti; 5° a colonna; 6° metodo di posizione.

Lezione VI.

Matematiche nell'antico Egitto.

Stato dell'Egitto e sua popolazione nell'antichità. Breve schizzo delle principali dinastie dei re egiziani e principali fatti politici della vita dell'Egitto. Tre generi di scrittura usati nell'Egitto. Numerazione scritta nel sistema geroglifico. Papiro di Rinda e sua menzione nello studio della letteratura. Breve rassegna del suo contenuto.

Lezione VII.

Matematiche nell'antico Egitto

(continuazione).

Stato delle matematiche nell'Egitto al tempo dell'elaborazione del papiro di Rinda, dedotto dai dati contenuti nel papiro medesimo. — *Aritmetica.* Numerazione scritta. Trasformazione delle frazioni. Uso dei segni. Somma e sottrazione. Moltiplicazione. Divisione. Elevazione a potenza. Divisione in parti proporzionali. Rapporti geometrici ed inizio dello studio delle proporzioni. Media aritmetica. Problemi relativi alle progressioni aritmetiche. Equazioni di primo grado con una incognita. — *Geometria.* Relativa scarsezza di cognizioni geometriche nell'antico Egitto. Angoli. Linee perpendicolari e parallele. Figure. Origine della dottrina della similitudine. Misura delle aree. Quadratura del cerchio. Solidi geometrici. Paragone delle piramidi. Misura dei volumi dei tronchi di piramide e di cono. Arte del disegno lineare geometrico. Osservazioni generali sui principali metodi d'investigazione dei matematici egiziani.

Lezione VIII.

Matematiche nell'antico Egitto (fine).

Notizie che abbiamo delle cognizioni matematiche degli abitanti dell'antica Caldea.

Insufficienza delle nostre nozioni sullo stato e sullo sviluppo raggiunto dalle matematiche nell'antico Egitto nel tempo susseguente all'elaborazione del papiro di Rinda. Iscrizione del tempio di Edfu. Ipotesi che da essa si deduce. — Stato dell'antica Caldea e sua popolazione nell'antichità. Scrittura cuneiforme. Numerazione scritta. Sistema di numerazione sessagesimale. Scoperta di Hincks. Tavola dei quadrati e dei cubi di Senkereh. Influenza del principio del posto nella numerazione. Applicazione dell'aritmetica e della geometria al misticismo. Nostre nozioni sulle cognizioni geometriche dei dotti Caldei. Divisione del circolo. Gradi. Numero π.

MATEMATICA NELL'ANTICA GRECIA.

PERIODO DELL'ASSIMILAZIONE DELLE COGNIZIONI ACQUISTATE DAL GENERE UMANO

Lezione IX.

Scuola Ionica.

Conseguenze che ebbe per la scienza il commercio dei Greci coi popoli civili dell'Oriente, nel tempo anteriore alla fondazione della Scuola Ionica. Biografia di Talete di Mileto. Sue cognizioni matematiche. Stato delle matematiche al tempo dei successori di Talete. Anassagora. Studio delle matematiche fatto dalle persone non appartenenti alla Scuola Ionica. Enopide di Chio. Democrito di Abdera.

Lezione X.

Scuola Pitagorica.

Vita ed attività scientifica di Pitagora. Aritmetica dei pitagorici. Studio delle proprietà dei numeri. Progressioni aritmetiche. Dottrina delle proporzioni e delle medie grandezze.

Lezione XI.

Scuola Pitagorica

(continuazione).

Geometria dei pitagorici. Teorema di Pitagora. Triangoli rettangoli razionali. [1] Linee incommensurabili e numeri irrazionali. Signi-

---

[1] **Viète nel suo *Canon Mathematicus seu ad triangula cum oppendicibus*, pubblicato nel 1579, ha inserita una tavola che dà la serie dei triangoli rettangoli razionali, supponendo sia l'ipotenusa, sia la base, sia la perpendicolare divisa in 100000 parti. Gli angoli corrispondenti a ciascuno**

ficato dell'idea dell'irrazionalità nella dottrina religiosa e filosofica dei pitagorici. Equivalenza delle figure. Somma degli angoli interni d'un triangolo. Dottrina dei poliedri regolari. Poligoni regolari. Poligoni stellati. Forma, contenuto e metodi della geometria dei pitagorici.

PERIODO DELL'ATTIVITÀ INDIPENDENTE DEI MATEMATICI

Lezione XII.

Matematiche in Grecia nel V secolo.

Crollo della lega dei pitagorici ed importanza di questo fatto pel conseguente sviluppo della geometria greca. Il problema della divisione d'un arco o d'un angolo in un numero arbitrario di parti uguali ed il suo caso particolare della trisezione dell'angolo. Opere di Ippia di Elide. Problemi della duplicazione del cubo e della quadratura del cerchio. Vita e lavori di Ippocrate di Chio. Tentativi di Antifone e di Brisone per risolvere il problema della quadratura del cerchio. Paradossi di Zenone e loro importanza nella storia della geometria greca. Stato delle matematiche in Grecia alla fine del V secolo. Principio della dottrina della prospettiva. Teeteto attico ed i suoi lavori.

Lezione XIII.

Scuola di Platone.

Breve notizia della vita e dell'attività di Platone. Sue considerazioni sullo stato e sull'importanza delle matematiche nell'ambito della scienza. Opera di Platone nel dirigere l'attività matematica della sua scuola. Lavori di matematiche, e particolarmente di metodologia e di filosofia, appartenenti a Platone. Attività matematica dei dotti e loro unione con l'Accademia. Laodamante. Attività matematica degli allievi dell'Accademia. Dinostrate. Menecmo. Eudosso di Gnido. Ermotimo di Colofone. Aristeo il vecchio. Scuola dei peripatetici. Sviluppo dell'opera di questa scuola nella storia delle matematiche. Eudemio di Rodi. Teofrasto di Lesbo.

---

di questi triangoli sono stati omessi da Viète, giacchè sono assolutamente irrazionali fra loro. (Cfr. Montucla, *Histoire des Mathématiques*, Paris, An. VII, t. I, p. 611.)

Proclo, nei suoi commentarii sulla proposizione 47 del I libro di Euclide, dà l'indicazione delle ricerche fatte dai pitagorici sui *triangoli rettangoli aritmetici*. La formola che adopravano per formare un numero infinito di questi triangoli può scriversi in algebra come segue:

$$a^2 + \left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2.$$

Platone determinava i triangoli rettangoli in numeri, per mezzo d'un metodo che può essere espresso con l'equazione: $a^2 + \left(\frac{a^2}{4} - 1\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} + 1\right)^2$. (Cfr. Libri, *Histoire des Mathématiques en Italie*, t. I, p. 206, n. 4.)

Lezione XIV.

Euclide ed i suoi lavori.

Alessandria. Dinastia dei Tolomei e dimostrazione della protezione da essa accordata alle scienze. Scuola di Alessandria. Notizie della vita di Euclide. Compendio generale del contenuto degli " Elementi ". Resoconto del contenuto dei libri separatamente considerati. Osservazioni sullo scopo degli " Elementi ", sul loro grado di originalità e sulla forma dell'esposizione. Questione dell'autenticità delle copie pervenute sino a noi. Altre opere di Euclide. " Sofismi (*Fallaciarum liber*) ". " Porismi ". " Dei dati (*Data*) ". " Libro della divisione delle superficie (*De Divisionibus*) ". " Luoghi sopra una superficie (*Locorum ad superficiem liber*) ". " Sezioni coniche ". Opere attribuite ad Euclide sulla musica, sull'astronomia, sull'ottica e sulla meccanica.

Lezione XV.

Eratostene ed Apollonio di Perga.

Notizie della vita e dell'attività di Eratostene. Lettera sulla duplicazione del cubo. Mesolabio. Scritto sulle medie grandezze. Crivello di Eratostene. Saggio per la determinazione della grandezza della terra. — Notizie della vita e delle opere di Apollonio Pergeo. Suoi lavori in fatto di numerazione e di calcolo. Otto libri di sezioni coniche. Due libri sulla divisione del rapporto. [1] Altre opere di Apollonio.

Lezione XVI.

Matematici italiani.

Le matematiche in Italia dopo il crollo della lega dei pitagorici. Archita di Taranto ed i suoi lavori matematici. Biografia di Archimede. Opere di Archimede pervenute sino a noi; loro carattere e tendenza. Esposizione delle scoperte e dei lavori di Archimede nel dominio della geometria nel piano e nello spazio, dell'aritmetica e della meccanica.

PERIODO DELLA DECADENZA DELLA MATEMATICA GRECA

Lezione XVII.

Studiosi dell'ultimo periodo dello sviluppo della scienza matematica greca secondo lo spirito greco.

Osservazioni generali sul carattere e sulla tendenza dell'attività matematica di quest'epoca. Nicomede e la sua concoide. Diocle e la sua cissoide. Perseo. Zenodoro. Ipsiclo di Alessandria. Lavori matematici dell'astronomo Ipparco.

---

[1] Qui il Bobynin evidentemente allude ai due libri *de sectione rationis* e *de sectione spatii* di Apollonio, dei quali il primo fu ritrovato tradotto in arabo e pubblicato da Halley nel 1708, ed il secondo fu ricostruito dallo stesso Halley mediante la semplice descrizione che ne dà Pappo. (Cfr. Montucla, op. cit., t. I, p. 251.)

INDIRIZZO PRESO DALLA MATEMATICA GRECA SOTTO L'INFLUENZA ESERCITATA IN PARTE DALLE ALTRE SCIENZE E PRINCIPALMENTE DALLE TENDENZE ESTRANEE ALLO SPIRITO GRECO

INDIRIZZO PRESO DALLE APPLICAZIONI

Lezione XVIII.

Coltivazione della meccanica e della geodesia.

Erone di Alessandria. Determinazione del tempo in cui visse e notizie biografiche di lui. Suoi scritti di meccanica. Lavori geodetici e geometrici di Erone. Sesto Giulio Africano.

Lezione XIX.

Coltivazione della trigonometria.

Studiosi di geometria dell'epoca compresa tra la fine del I secolo avanti Cristo e la metà del II secolo dopo Cristo. Gemino di Rodi; Teodosio di Tripoli; Dionisodoro; Sereno di Antisia. Menelao di Alessandria ed il suo scritto " Del calcolo delle corde ". Claudio Tolomeo ed i suoi lavori di geometria e di trigonometria.

INDIRIZZO DELL'ARITMETICA

Lezione XX.

Coltivazione dell'aritmetica e dell'analisi inderminata.

Studiosi dell'aritmetica della scuola neo-pitagorica. Nicomaco da Gerasa (di Siria). Teone di Smirne. Timaride. Matematici della scuola neo-platonica: Porfirio; Giamblico. Diofanto alessandrino. Contenuto del suo libro " Aritmetica " e sue particolarità caratteristiche. Scritto di Diofante " Dei numeri poligoni ".

Lezione XXI.

Epoca della completa decadenza della scienza matematica in Grecia.

L'epoca è caratterizzata esclusivamente dalla diligenza dei commentarii i quali rappresentano la scienza dei matematici. Suo principio e suo progressivo sviluppo. Pappo di Alessandria è il rappresentante di maggior ingegno di quest'epoca. Contenuto del suo scritto " Collezioni ". Patrizio. Teone alessandrino. Ippazia. Matematici della scuola di Atene. Proclo. Damazio di Damasco. Eutochio di Ascalona, Giovanni Filopono.

LE MATEMATICHE PRESSO GL'INDIANI

Lezione XXII.

Gl'Indiani. Nostre notizie sulla loro letteratura matematica.

Origini, organizzazione dello Stato e qualità nazionali degl'Indiani. Loro civiltà. Relazioni con la Grecia e fatti risultanti dalla mutua influenza fra le due nazioni. Aryabhatta e parte matematica della sua " Aryabhattiana „. Brahmagupta. Contenuto dei capitoli dedicati alle matematiche nel suo scritto " Brahma-sfuta-siddhâuta „. Bhâskara Acârya. La sua opera " Siddhâutaçiromani „. Contenuto delle sue parti matematiche, cioè dei capitoli Lîlâwati e Vija-Ganita.

Lezione XXIII.

Matematica degl' Indiani.

Sistemi di numerazione scritta. Le quattro operazioni fondamentali sui numeri interi. Frazioni. Regole e problemi di aritmetica pratica. Aritmetica teorica. — *Algebra.* Regola dei segni. Termini dei polinomii. Numeri negativi. Duplicità delle radici delle equazioni quadratiche. Numeri irrazionali ed operazioni su di essi. Applicazione dell'algebra alla soluzione dei problemi di geometria. Teoria delle equazioni. — *Analisi indeterminata.* Osservazioni generali sul procedimento degl'Indiani nella soluzione dei problemi indeterminati. Equazioni indeterminate con due incognite di primo e di secondo grado, e metodo per la loro risoluzione in numeri interi.

Lezione XXIV.

Matematica degl' Indiani
(continuazione).

Geometria. Particolarità caratteristiche e principii della geometria degl'Indiani. Forme indiane della dimostrazione del teorema di Pitagora. Misura dei triangoli e dei quadrangoli. Proposizioni relative alla misura del cerchio, delle sue parti, delle linee e dei poligoni regolari in esso iscritti. Quadratura del cerchio. Approssimazione di π. — *Trigonometria.* Seno e seno-verso; loro uso e tavole. Triangoli rettangoli piani e sferici. — Caratteri della matematica indiana e sua sfera d'influenza. Cinesi; Arabi; Greci; Europa occidentale.

MATEMATICA PRESSO GLI ARABI

Lezione XXV.

Letteratura matematica araba e suoi scrittori.

Sviluppo della potenza politica degli Arabi. Principali fatti della loro storia politica. Primitiva influenza della scienza indiana e po-

steriore prevalenza dell'influenza greca. Traduzione e commento delle opere matematiche degli scrittori dell'antica Grecia. Astronomi e matematici arabi nel IX, X ed XI secolo. Matematici egiziani. Astronomi e matematici arabi in Ispagna. Astronomi e matematici in Oriente nei secoli dal XIII al XVI.

Lezione XXVI.

Matematica degli Arabi.

Aritmetica. Numerazione scritta. Arte del calcolo. Regole di falsa posizione. Estrazione delle radici. Studio delle proprietà dei numeri. Quadrati magici. Serie. Soluzione dei problemi " Aritmetici „ di Diofanto. Costruzione dei triangoli rettangoli razionali. Residui quadratici e cubici. — *Algebra.* Origine dei nomi algoritmo ed algebra. Terminologia e regola dei segni. Operazioni sulle espressioni algebriche. Numeri negativi. Equazioni di primo e di secondo grado. Equazioni di grado superiore riducibili a quelle di secondo. Equazioni cubiche e di quarto grado. Equazioni indeterminate.

Lezione XXVII.

Matematica degli Arabi
(continuazione).

Geometria. Primitiva forma greco-indiana della geometria degli Arabi. Opere di Alcarismo (Al Chwarizmi), dei figli di Mûsâ ibn Schâkir e di Abûl-Wafâ. Prevalenza esclusiva dell'influenza della geometria greca. Problemi della trisezione dell'angolo, della quadratura del cerchio e del segmento sferico. Poligoni regolari. Sezioni coniche. Contributo degli Arabi alla geometria pratica. Reciproca applicazione della geometria e dell'algebra. — *Trigonometria.* Risultamenti dell'influenza indiana sulla trigonometria degli Arabi. Seni e seno-versi, Tangenti e cotangenti. Tavole trigonometriche. Trigonometria sferica.

LE MATEMATICHE PRESSO LE NAZIONI DELL'EUROPA OCCIDENTALE

Lezione XXVIII.

Stato delle matematiche nelle nazioni che hanno diffuso la scienza dei matematici greci nell'Europa occidentale.

Bisanzio. Carattere e rappresentanti della letteratura matematica bizantina dal VII al XV secolo. — *Roma.* Letteratura matematica romana dal suo sorgere nel primo secolo avanti Cristo fino alla caduta dell'impero romano occidentale.

PERIODO DELL'ASSIMILAZIONE DELLE COGNIZIONI ROMANE

LEZIONE XXIX.

Epoca dell'attività monastica.

Cassiodoro. Boezio ed i suoi lavori. Isidoro di Spagna e le sue *Origines*. Il Venerabile Beda. Alcuino. Attività civilizzatrice di Carlo Magno. Stato delle cognizioni matematiche nell'Europa occidentale alla fine del secolo IX ed al principio del X.

LEZIONE XXX.

Gerberto.

Vita ed attività scientifica di Gerberto. Principio dell'influenza degli Arabi. Abbaco e metodi di divisione. Letteratura sugli abbachi.

PERIODO DELL'ASSIMILAZIONE DELLA SCIENZA ARABA

LEZIONE XXXI.

Traduzioni latine delle opere della letteratura matematica araba.

Progressivo sviluppo dell'influenza araba nell'Europa occidentale nell'epoca precedente alle Crociate. Attività di Atelarto o Adelardo di Bath. Platone di Tivoli. Gherardo di Cremona. Traduttori di secondo ordine del XII secolo. Cooperazione alla diffusione della scienza da parte dell'imperatore Federigo II e del re di Castiglia Alfonso X. Giovanni Campano.

LEZIONE XXXII.

Leonardo Pisano.

Notizie della vita e dell'attività di Leonardo. Suoi scritti e cenno del loro contenuto.

LEZIONE XXXIII.

Assimilazione delle cognizioni scientifiche importate dagli Arabi nell'Europa occidentale.

Stato dell'insegnamento della scienza matematica nelle università medievali. Sviluppo di quest'insegnamento nel XIV e nel XV secolo. Letteratura matematica di quell'epoca e suoi rappresentanti più importanti.

STORIA DELLE MATEMATICHE NELL'EVO MODERNO

ULTERIORE SVILUPPO DELLE MATEMATICHE NEL RAMO ARITMETICO-ALGEBRICO

Lezione I.

Diffusione delle matematiche in Italia.

Importanza dell'invenzione della stampa e della caduta di Bisanzio per lo sviluppo delle scienze nell'Europa occidentale. Traduzioni e commenti delle opere dei matematici greci. Soluzione delle equazioni cubiche nei lavori di Scipione Ferro, di Tartaglia e di Cardano. Notizie della vita e di altri lavori di questi dotti.

Lezione II.

Diffusione della matematiche in Italia

(continuazione).

Risoluzione delle equazioni di quarto grado. Notizie della vita e dei lavori di Ludovico Ferrari. Procedimento per la determinazione delle radici delle equazioni numeriche. Notizie sui numeri negativi e sulle radici negative ed immaginarie delle equazioni. Raffaele Bombelli e la sua " Algebra ". Soluzione di Bombelli del caso irriducibile della formola di Cardano.

Lezione III.

Francesco Viète.

Biografia di Viète. Sue opere. Lavori sull'introduzione e sul perfezionamento del calcolo letterale. Elucubrazioni di Analisi indeterminata. Ricerche sulla trasformazione delle equazioni e relazioni tra i coefficienti e le radici. Nuovo metodo, fondato sul principio di riduzione, dato da Viète, per la risoluzione delle equazioni di II, III e IV grado. Abbassamento di un'unità del grado di un'equazione.

Lezione IV.

Francesco Viète

(continuazione).

Importanza del metodo di Viète per la determinazione delle radici delle equazioni numeriche. — *Applicazione dell'algebra alla geometria.* Soluzione di Viète del caso irriducibile della formola di Cardano per mezzo d'un'equazione trigonometrica. Ricerche di Viète sulla divisione d'un angolo in un numero dispari di parti uguali (*sectiones angulares*) e loro importanza nella storia dello sviluppo dell'algebra. Lavori di Viète in trigonometria ed in geometria.

Lezione V.

L'algebra in Germania, in Inghilterra ed in Olanda.
Stato della geometria nel XVI secolo.

Michele Stifel e la sua *Arithmetica integra.* Scrittori di algebra di secondo ordine contemporanei di Viète. Algebristi posteriori a Viète. Alberto Girard e le sue opere. Tommaso Harriot e la sua *Artis analyticae praxis.* Scomposizione del primo membro d'un'equazione in fattori lineari. — Indirizzo e carattere dei lavori geometrici del XVI secolo. Giovanni Werner di Norimberga. Lavori geometrici di Tartaglia e di Commandino. Maurolico di Messina e suoi lavori originali di geometria. Opere di Pietro Ramus (Pietro de la Ramée) e loro indirizzo. Determinazione del rapporto fra la circonferenza ed il diametro. Lavori di trigonometria e calcolo delle tavole trigonometriche. Tavole di Giorgio Joachim von Lauchen o Retico.

Lezione VI.

Progresso dell'arte del calcolare.

Tendenza ad abbreviare ed a semplificare i calcoli risultante dall'applicazione della geometria all'astronomia. *Frazioni decimali.* Inizio della loro applicazione al calcolo. Loro introduzione nell'uso generale fatta da Simone Stevino. *Logaritmi.* Primo accenno della loro idea fondamentale nell'opera *Arithmetica integra* di Stifel. Biografia di Giovanni Napier. Sviluppo della sua idea dei logaritmi. Le sue tavole; le loro susseguenti edizioni in Inghilterra e la loro riproduzione nelle altre nazioni d'Europa. Enrico Briggs e le sue tavole. Lavori di Vlacq. Scoperta dei logaritmi fatta, indipendentemente da Napier, dal dotto svizzero suo contemporaneo Giusto Bürgi. Differenza dello scopo che si erano proposti l'uno e l'altro.

Lezione VII.

Renato Descartes ed introduzione fatta da lui della geometria nell'ambito delle scienze che si sviluppano per mezzo dell'algebra.

Biografia di Descartes. Suoi lavori matematici. Contenuto della sua “ Geometria „. Risultamenti delle investigazioni di Descartes nel dominio dell'algebra. Natura e significato delle radici negative delle equazioni. Regola di Descartes per la determinazione del numero delle radici positive e negative d'un'equazione. Metodo dei coefficienti indeterminati. — *Applicazione dell'algebra alla geometria delle curve.* Applicazione dell'algebra alla teoria delle curve. Dottrina delle tangenti.

Lezione VIII.

Progresso dell'analisi indeterminata e della teoria dei numeri. Inizio della teoria delle Probabilità

Stato dell'analisi indeterminata nella seconda metà del secolo XVI. Traduzioni dell' " Aritmetica „ di Diofanto. Biografia di Bachet de Méziriac. Suoi lavori. Biografia di Fermat. Suoi lavori sulla teoria dei numeri. Biografia di Pascal. Studio, fatto da Pascal e da Fermat, dei primi problemi della teoria delle Probabilità.

SVILUPPO DELL'ANALISI DEGLI INFINITAMENTE PICCOLI

Lezione IX.

Metodo di esaustione.

Metodo di esaustione di Euclide e di Archimede.

Lezione X.

Inizio del calcolo degli infinitamente piccoli.

Considerazioni dei matematici dell'Europa occidentale del XVI secolo sull'antico metodo di esaustione. Primi fondamenti dati da Kepler al calcolo degli infinitamente piccoli. Importanza della sua opera *Nova stereometria doliorum vinariorum* nella storia dello sviluppo di questo calcolo.

Lezione XI.

Metodo degl' indivisibili.

Cavalieri e le sue opere. Metodo degl'indivisibili ed obbiezioni allo stesso. I seguaci di Cavalieri. Importanza del metodo di Cavalieri per lo sviluppo del calcolo degl'infinitamente piccoli.

Lezione XII.

Altri metodi di quadratura e di cubatura.

Fonti dalle quali derivano. Metodo di Fermat. Vita e lavori di Roberval. Metodo degl'indivisibili di Roberval ed opere che lo espongono. Opere di Pascal che trattano lo stesso argomento e loro importanza per lo sviluppo dell'analisi degl'infinitamente piccoli. Metodo di Wallis. Esposizione di esso nella sua opera " *Aritmetica infinitorum* „. Lavori di Niccola Mercator e di Gregorio de Saint-Vincent.

Lezione XIII.

Metodo per condurre le tangenti e determinazione
dei massimi e minimi.

Determinazione delle tangenti presso i geometri greci. Metodo di Roberval. Metodo di Fermat per determinare i massimi ed i minimi, sul quale è fondato il suo metodo per condurre le tangenti. Metodo di Barrow.

Lezione XIV.

Isacco Newton ed il suo metodo delle flussioni.

Vita ed opere di Newton. Metodo delle flussioni.

Lezione XV.

Calcolo differenziale ed integrale.

Vita di Leibnitz e suoi lavori matematici. Primo sviluppo dell'idea fondamentale dell'analisi degl'infinitamente piccoli nelle prime memorie manoscritte di Leibnitz. Contenuto delle sue memorie a stampa. Disputa con Newton. Parte avuta da Leibnitz nell'ulteriore sviluppo dei principii del calcolo.

Lezione XVI.

Diffusione dell'analisi degl'infinitamente piccoli
alla fine del XVII ed al principio del XVIII secolo.

Propagazione del metodo delle flussioni fra i matematici inglesi. Taylor. Mac-Laurin. Obbiezioni contro i principii del calcolo differenziale ed integrale. Propagazione di questo tra i matematici del continente. Giacomo Bernoulli ed i suoi lavori di Analisi degl'infinitamente piccoli. Problemi da lui proposti sulla catenaria, sulla curva elastica e sulla veliera.

Lezione XVII.

Diffusione dell'analisi degl'infinitamente piccoli
alla fine del XVII ed al principio del XVIII secolo.
(continuazione).

Giovanni Bernoulli e le sue opere di analisi degl'infinitamente piccoli. Marchese de l'Hôpital. Ruggiero Cotes. Abramo de Moivre.

Lezione XVIII.

Primitivo sviluppo del calcolo delle variazioni.

Problemi delle brachistocrone e degl'isoperimetri. Disputa fra i fratelli Giacomo e Giovanni Bernoulli.

Lezioni XIX e XX.

Leonardo Euler.

Vita e lavori di Leonardo Euler. I più celebri fra gli scrittori di scienza matematica suoi contemporanei.

Lezioni XXI e XXII.

Lagrange.

Vita e lavori di Lagrange.

SVILUPPO DELLA GEOMETRIA SINTETICA

Lezione XXIII.

I geometri del secolo XVII.

Midorge. Desargues. Pascal. Gregorio de Saint-Vincent. De la Hire. Huyghens. Newton.

Lezione XXIV.

I geometri del secolo XVIII.

Mac-Laurin. Halley. Roberto Simson. Matteo Stewart. Lambert.

Lezione XXV.

Monge.

Vita e lavori di Monge. Importanza delle sue opere nella storia dello sviluppo della geometria sintetica.

Lezione XXVI.

Carnot e Poncelet.

Géometrie de position di Carnot. Poncelet ed il suo *Traité des propriétés projectives des figures.* Importanza storica del fatto della liberazione della Geometria dalla necessità di ricorrere all'Analisi pel suo sviluppo ulteriore.

Alfonso Bonolis.

INTORNO AD UNA FORMA DEL POTENZIALE DI UNA MASSA SFERICA, LA CUI DENSITÀ NON SIA COSTANTE

Continuaz. e fine v. fasc. prec.

Per avere la funzione potenziale relativa ad un punto occupato da massa o posto nella cavità interna, nel caso d'un involucro, dobbiamo riferirci alla formula che dà la funzione potenziale relativa ad un punto occupato da massa d'una sfera massiccia ed omogenea. Si noti che il caso dell'involucro si può ridurre a quello della sfera piena, supponendo che la densità $\delta(u)$ sia zero sino ad un certo valore di u che corrisponde alla superficie sferica, limite interno dell'involucro.

Sia P un punto posto nell'interno d'una sfera massiccia di densità costante 1 e di raggio r, e sia l la distanza del centro da P.

La funzione potenziale della sfera, relativa a P, si sa essere

$$2\pi r^2 - \tfrac{2}{3}\pi l^2.$$

Se si imagina di togliere dall'interno di questa sfera un'altra sfera di centro e di raggio diversi da quelli della prima, ma contenente pur essa il punto P, detti r_1 e l_1 rispettivamente il raggio e la distanza di P dal centro di questa nuova sfera, la sua funzione potenziale relativa a P è

$$2\pi r_1^2 - \tfrac{2}{3}\pi l_1^2.$$

E quindi la funzione potenziale dell'involucro che rimane sarà

$$2\pi(r^2 - r_1^2) - \tfrac{2}{3}\pi(l^2 - l_1^2).$$

Ora se supponiamo che la superficie della prima sfera corrisponda al parametro u, e quella della seconda al parametro $u + du$, il potenziale dell'involucro infinitesimo, relativo al punto P interno ad esso, sarà dato dal differenziale rispetto ad u dell'espressione precedente; cioè sarà

$$4\pi r \frac{dr}{du} du - \tfrac{4}{3}\pi l \frac{dl}{du} du.$$

Ovvero, per la natura di l, sarà

$$4\pi r \frac{dr}{du} du + \tfrac{4}{3}\pi(x - a)\frac{da}{du} du$$

la funzione potenziale dell'involucro relativa al punto interno P, quando la densità sia $= 1$. E se è $\delta(u)$ la densità dell'involucro, la funzione potenziale sarà

$$4\pi\delta(u)\left(r\frac{dr}{du} + \frac{x-a}{3}\cdot\frac{da}{du}\right)du.$$

Ciò premesso, se P è un punto posto nell'interno della massa sferica in considerazione, la cui densità varia per superficie sferiche eccentriche, esso si troverà sopra una di queste superficie, che supporremo corrispondenti al parametro u. Allora, riguardo a tutti gli staterelli interni alla superficie u, il punto è esterno, ed è invece interno riguardo a tutti i rimanenti. La funzione potenziale relativa all'insieme dei primi è

$$4\pi \int_{u_0}^{u_1} \delta(u) \frac{r^2}{l} \left(\frac{dr}{du} + \frac{r}{3} \cdot \frac{x-a}{l^3} \cdot \frac{da}{du} \right) du;$$

e quella relativa all'insieme dei secondi sarà, ripetendo il ragionamento già fatto per ottenere la funzione potenziale relativa all'insieme degli involucri ora considerati

$$4\pi \int_{u_0}^{u_1} \delta(u)\, r \frac{dr}{du} du + \tfrac{4}{3}\pi \int_{u_0}^{u_1} \delta(u)(x-a) \frac{da}{du} du.$$

Quindi la funzione potenziale di tutta la massa, relativa ad un punto di essa, ha la forma

$$V = 4\pi \int_{u_0}^{u_1} \delta(u) \frac{r^2}{l} \left(\frac{dr}{du} + \frac{r}{3} \cdot \frac{x-a}{l^3} \cdot \frac{da}{du} \right) du + \\ + 4\pi \int_{u}^{u_1} \delta(u)\, r \frac{dr}{du} du + \tfrac{4}{3}\pi \int_{u}^{u_1} \delta(u)(x-a) \frac{da}{du} du.$$

Questa forma della V si può applicare tanto ad una sfera massiccia quanto ad un involucro. Riguardo a quest'ultimo il punto può essere o nella cavità o nella massa od all'esterno. Indico con $V_{e'}$, V_i, V_e rispettivamente le funzioni potenziali relative a questi tre casi.

Se u' è il parametro della superficie interna dell'involucro, allora da u_0 ad u' è $\delta = 0$; e quindi

$$V_{e'} = 4\pi \int_{u'}^{u_1} \delta(u)\, r \frac{dr}{du} + \tfrac{4}{3}\pi \int_{u'}^{u_1} \delta(u)(x-a) \frac{da}{du} du.$$

Sia ora il punto potenziato posto nella massa, e sia u la superficie del sistema sul quale si trova. Allora, essendo sempre
$\delta(u) = 0$ da u_0 ad u', si avrà

$$V_i = 4\pi \int_{u'}^{u} \delta(u) \frac{r^2}{l} \left(\frac{dr}{du} + \frac{r}{3} \frac{x-a}{l^3} \frac{da}{du} \right) du + \\ + 4\pi \int_{u}^{u_1} \delta(u) \cdot r \frac{dr}{du} du + \tfrac{4}{3}\pi \int_{u}^{u_1} \delta(u) \cdot (x-a) \frac{da}{du} du.$$

Finalmente, se il punto potenziato è nello spazio esterno, allora tra u ed u' la $\delta = 0$; e, se u'' è l'ultima superficie sferica sulla quale δ non è zero, si ha

$$V_e = 4\pi \int_{u'}^{u''} \delta(u) \cdot \frac{r^2}{l} \left(\frac{dr}{du} + \frac{r}{3} \frac{x-a}{l^3} \cdot \frac{da}{du} \right) du.$$

Da queste formule si vede facilmente che le $V_{e'}$, V_i, V_e si continuano l'una nell'altra.

Si è già veduto che per la V_e è soddisfatta la condizione

$$\Delta_2 V_e = 0.$$

Deve essere altresì

$$\Delta_2 V_{e'} = 0.$$

Infatti, basta osservare che dei due integrali, che compongono la V_e, l'uno non contiene le coordinate del punto potenziato e l'altro solamente la x in modo esplicito; per cui se ne conclude che le derivate seconde sono singolarmente zero, e che quindi è pure

$$\Delta_2 V_{e'} = 0.$$

Invece, per la V_i si deve verificare la condizione

$$\Delta_2 V_i = -4\pi\,\delta(u).$$

A tal fine, giova notare che, fissato il punto nell'interno della massa, resta determinata la superficie sferica del sistema sulla quale esso si trova. In altre parole, date le coordinate del punto potenziato, resta fissato il parametro u, che comparisce come limite d'integrazione; e perciò è funzione delle coordinate del punto.

Nella derivazione, occorrerà derivare non solo rispetto alle x, y, z contenute nella funzione integranda, ma anche rispetto a quelle implicite in u; ossia bisognerà derivare l'integrale rispetto al limite u, e moltiplicare per le derivate di u rispetto alle variabili x, y, z.

Ora, la derivata di un integrale rispetto ad uno dei limiti è, a meno del segno, ciò che diventa la funzione da integrarsi quando si dà alla variabile il valore del limite.

Nel caso presente, le quantità r ed l, per il valore di u corrispondente alla superficie sferica del sistema sulla quale è il punto potenziato, diventano eguali; e le derivate di r e di a rispetto ad u assumeranno valori particolari, ed a diverrà l'ascissa del centro della superficie sferica u.

Ciò premesso, formiamo le derivate seconde della V_i rispetto alle x, y, z. Per comodità, indichiamo con A′, B′, C′ le derivate prime di V_e rispetto alle coordinate x, y, z contenute nella funzione integranda, e con A″, B″, C″ le corrispondenti derivate seconde, che sono già state precedentemente determinate. Allora

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} = \left(4\pi\,.\,\delta(u)\,.\,r\frac{dr}{du} + \tfrac{4}{3}\pi\,.\,\delta(u)\,.\,(x-a)\frac{da}{du}\right)\frac{\partial u}{\partial x} -$$
$$-\left(4\pi\,.\,\delta(u)\,.\,r\frac{dr}{du} + \tfrac{4}{3}\pi\,.\,\delta(u)\,.\,(x-a)\frac{da}{du}\right).\frac{\partial u}{\partial x} +$$
$$+ A' + \tfrac{4}{3}\int_u^{u_1}\delta(u)\,.\,\frac{da}{du}\,du$$

ossia

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} = A' + \tfrac{4}{3}\pi\int_u^{u_1}\delta(u)\,.\,\frac{da}{du}\,du\,;$$

e quindi

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = -\left(4\pi . \delta(u) . r^3 \frac{x-a}{r^3} . \frac{dr}{du}\right) . \frac{du}{dx} +$$

$$+ \tfrac{4}{3}\pi . \delta(u) . r^3 \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3(x-a)^2}{r^5}\right) \frac{da}{du} . \frac{du}{dx} -$$

$$- \tfrac{4}{3}\pi . \delta(u) . \frac{da}{du} . \frac{\partial u}{\partial x} + A''$$

donde, riducendo, si ha

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = -4\pi . \delta(u) . \frac{x-a}{r} . \frac{dr}{du} . \frac{\partial u}{\partial x} -$$

$$-4\pi . \delta(u) . \frac{(x-a)^2}{r^2} . \frac{da}{du} . \frac{\partial u}{\partial x} + A''.$$

Analogamente si ottiene

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} = -4\pi . \delta(u) . \frac{y}{r} . \frac{dr}{du} . \frac{\partial u}{\partial y} - 4\pi . \delta(u) . \frac{(x-a)y}{r^2} . \frac{da}{du} . \frac{\partial u}{\partial y} + B''$$

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} = -4\pi . \delta(u) . \frac{z}{r} . \frac{dr}{du} . \frac{\partial u}{\partial z} - 4\pi . \delta(u) . \frac{(x-a)z}{r^2} . \frac{da}{du} . \frac{\partial u}{\partial z} + C''.$$

Ed osservando che si può porre

$$\frac{dr}{du} . \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{da}{du} . \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial x};$$

ed analogamente

$$\frac{dr}{du} . \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{da}{du} . \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial a}{\partial y},$$

$$\frac{dr}{du} . \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z} \quad \text{e} \quad \frac{da}{du} . \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial a}{\partial z},$$

sommando membro a membro le precedenti eguaglianze, si otterrà

$$\Delta_2 V_1 = -4\pi . \delta(u)\left((x-a)\frac{\partial r}{\partial x} + y\frac{\partial r}{\partial y} + z\frac{\partial r}{\partial z}\right) . \frac{1}{r} -$$

$$-4\pi . \delta(u)\left((x-a)\frac{\partial a}{\partial x} + y\frac{\partial a}{\partial y} + z\frac{\partial a}{\partial z}\right) . \frac{x-a}{r^2},$$

essendo

$$A'' + B'' + C'' = 0.$$

Si osservi inoltre che è

$$(x-a)^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

e che a ed r sono funzioni di u e, per quanto si è osservato, funzioni di x, y, z.

Quindi, derivando una prima volta rispetto ad x, una seconda rispetto ad y ed un'altra rispetto a z, si ha ordinatamente

$$-(x-a)\frac{\partial a}{\partial x} + (x-a) = r\frac{\partial r}{\partial x},$$

$$-(x-a)\frac{\partial a}{\partial y} + y = r\frac{\partial r}{\partial y},$$

$$-(x-a)\frac{\partial a}{\partial z} + z = r\frac{\partial r}{\partial z},$$

ovvero

$$(x-a)\frac{\partial a}{\partial x}=(x-a)-r\frac{\partial r}{\partial x},$$
$$(x-a)\frac{\partial a}{\partial y}=y-r\frac{\partial r}{\partial y},$$
$$(x-a)\frac{\partial a}{\partial z}=z-r\frac{\partial r}{\partial z}.$$

Si moltiplichino i membri di queste eguaglianze rispettivamente per $\frac{x-a}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}$; si avrà

$$\frac{(x-a)^2}{r^2}\cdot\frac{\partial a}{\partial x}=\left(\frac{x-a}{r}\right)^2-\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{x-a}{r},$$
$$\frac{(x-a)\,y}{r^2}\cdot\frac{\partial a}{\partial y}=\left(\frac{y}{r}\right)^2-\frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{y}{z},$$
$$\frac{(x-a)\,z}{r^2}\cdot\frac{\partial a}{\partial z}=\left(\frac{z}{r}\right)^2-\frac{\partial r}{\partial z}\cdot\frac{z}{r}.$$

Sommando membro a membro si ottiene

$$\frac{x-a}{r^2}\left((x-a)\frac{\partial a}{\partial x}+y\frac{\partial a}{\partial y}+z\frac{\partial a}{\partial z}\right)=1-\frac{1}{r}\left((x-a)\frac{\partial r}{\partial x}+y\frac{\partial r}{\partial y}+z\frac{\partial r}{\partial z}\right).$$

In virtù di questa relazione, si trova subito

$$\Delta_2 V_1=-4\pi\delta(u).$$

La V così trovata soddisfa quindi a tutte le condizioni richieste per essere una funzione potenziale; per cui ne concluderemo che la

$$V=4\pi\int_{u_0}^{u_1}\delta(u)\frac{r^2}{l}\left(\frac{dr}{du}+\frac{r}{3}\cdot\frac{x-a}{l^2}\cdot\frac{da}{du}\right)du+$$
$$+4\pi\int_{u}^{u_1}\delta(u)\left(r\frac{dr}{du}+\frac{x-a}{3}\cdot\frac{da}{du}\right)du,$$

è la funzione potenziale cercata.

***

Si vede facilmente come essa comprenda come casi particolari quelli della sfera omogenea e della sfera la cui densità varia per sfere concentriche.

Infatti, nel caso della sfera omogenea, o di un involucro sferico omogeneo, la densità δ è costante, come pure l ed a, ed il parametro u si riduce ad r; ed allora

$$V=\frac{4\pi\delta}{l}\int_{r_0}^{l}r^2\,dr+4\,\pi\delta\int_{l}^{r_1}rdr.$$

E quindi per l'involucro sferico si ha

$$V=2\pi\,.\,\delta\,.\,r_1^2-\tfrac{2}{3}\,\pi\,.\,\delta\,.\,l^2-\tfrac{1}{3}\,\pi\frac{r^3}{l};$$

e per la sfera piena, essendo $r_0 = 0$, sarà

$$V = 2\pi\delta r_1^2 - \tfrac{2}{3}\delta l^2.$$

Nel caso in cui la densità varî per superficie sferiche concentriche, questa risulta funzione di r, rimanendo costanti l ed a; e, poichè la variabile u si riduce alla r, si avrà

$$V = \frac{4\pi}{l}\int_{r_0}^{l} \delta(r) \,.\, r^2 dr + 4\pi \int_{l}^{r_1} \delta(r) \,.\, r\, dr.$$

G. Repetto
Sassari.

I NUMERI PERFETTI

1. La teoria dei numeri perfetti ha le sue basi in Euclide, nè deve sembrare assolutamente indegno che ci si occupi di essa, perchè, se pure possono essere un po' enfatiche le parole di Mersenne, il quale disse che chi trovasse altri numeri perfetti, oltre gli undici noti, avrebbe superata tutta l'analisi presente, non si deve dimenticare, come giustamente osserva il Lucas nella sua *Théorie des nombres,* che tale teoria « ha dato origine ai principali lavori « di Fermat e quindi all'Aritmetica superiore ».

Dicesi numero perfetto un numero che è uguale alla somma di tutti i suoi divisori, escluso tra questi il numero stesso: gli esempi più noti sono offerti dai primi due numeri perfetti che sono

$$6 = 1 + 2 + 3 \quad \text{e} \quad 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

Dalla definizione stessa risulta che un numero primo non può essere un numero perfetto: neppure una potenza d'un numero primo può essere un numero perfetto, poichè, se fosse a un numero primo ed a^n un numero perfetto, dovrebbe essere

$$a^n = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1};$$

il che è assurdo perchè il secondo membro altro non è che $\frac{a^n - 1}{a - 1}$, quantità evidentemente minore di a^n.

Euclide (Libro IX, Prop. 36) enuncia per trovare i numeri perfetti questa regola: « Se a partire dall'unità si prendono successivamente tanti numeri « successivi in progressione geometrica di ragione 2 fino a che la loro somma « sia un numero primo, il prodotto di questa somma per l'ultimo termine « sarà un numero perfetto ». Si ottiene così come forma di un numero perfetto $(2^{n+1} - 1)\,2^n$ colla condizione che $2^{n+1} - 1$ sia primo.

Consideriamo infatti la progressione geometrica suddetta e supponiamo che

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

sia un numero primo.

Per dimostrare che in tal caso il numero $(2^{n+1}-1)2^n$ è un numero perfetto, osservo che i divisori di esso oltre all'unità e al numero stesso sono: il primo fattore, tutti i divisori del secondo fattore, esso compreso, e i prodotti del primo fattore per i divisori del secondo: la somma loro dunque è

$$2^{n+1}-1+1+2+2^2+\ldots+2^n+(2^{n+1}-1)2+(2^{n+1}-1)2^2+\ldots$$
$$\ldots+(2^{n+1}-1)2^{n-1}=(2^{n+2}-2)+2^n(2^{n+1}-1)-(2^{n+1}-1)2=(2^{n+1}-1)2^n.$$

Per avere i numeri perfetti basta dunque nella progressione detta cercare quei termini che diminuiti dell'unità dànno luogo a numeri primi: il prodotto di ognuno di essi per il termine precedente della progressione è un numero perfetto.

Negli esercizi di Fitz Patrick e Chevrel si giunge a questa formola per una via più generale che mostra come non esistono numeri perfetti del tipo $a^n b$ ove a e b sono numeri primi salvo che per i valori $a=2$, $b=(2^{n+1}-1)$ che ci dànno appunto i numeri perfetti trovati col metodo di Euclide. Anzi si può dimostrare più generalmente che ogni numero perfetto pari ha la forma di quelli trovati con tale metodo. Infatti ogni numero pari è del tipo

$$2^n a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$$

ove a, b, c sono numeri primi e n è un numero intiero non nullo.

I divisori di questo numero sono dati dai divisori dei singoli fattori e dai loro prodotti, onde la loro somma è

$$(1+2+2^2+\ldots+2^n)(1+a+a^2+\ldots+a^\alpha)(1+b+b^2+\ldots+b^\beta)(1+c+c^2+\ldots+c^\gamma)\ldots=$$
$$=(2^{n+1}-1)(1+a+a^2+\ldots+a^\alpha)(1+b+b^2+\ldots+b^\beta)(1+c+c^2+\ldots+c^\gamma)\ldots$$

Essendo il numero proposto un numero perfetto, dovrà essere uguale alla somma de' suoi divisori da cui si tolga esso stesso: cioè sarà

$$2^n a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots=$$
$$=(2^{n+1}-1)(1+a+\ldots+a^\alpha)(1+b+\ldots+b^\beta)(1+c+\ldots+c^\gamma)\ldots-$$
$$-2^n a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots$$

ossia

$$(2^{n+1}-1)a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots+a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots=$$
$$(2^{n+1}-1)(1+a+\ldots+a^\alpha)(1+b+\ldots+b^\beta)(1+c+\ldots+c^\gamma)\ldots$$

da cui si ricava

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots+\frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots}{2^{n+1}-1}=$$
$$=(1+a+a^2+\ldots+a^\alpha)(1+b+b^2+\ldots+b^\beta)(1+c+c^2+\ldots+c^\gamma).$$

Ma il secondo membro è un numero intero, onde tale deve essere anche il primo: sarà cioè $a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots$ divisibile per $(2^{n+1}-1)$. Il primo membro resta così ridotto a due soli termini: così sarà del secondo: i termini del secondo sono in numero di $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots$ onde deve essere $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots=2$: perchè tale uguaglianza sussista, i numeri α, β, $\gamma\ldots$ devono essere tutti nulli tranne uno (e sia α) che deve valere 1.

Il numero cercato dunque è del tipo $2^n a$ ove a è un numero primo. Siccome poi deve essere

$$2^n a=1+2+2^2+\ldots+2^n+a+2a+2^2a+\ldots+2^{n-1}a,$$

ossia

$$2^n a=(2^{n+1}-1)+(2^n a-a),$$

si ricava che deve essere $a = 2^{n+1} - 1$, onde si ottiene per ogni numero perfetto pari la formola nota di Euclide.

Volendo poi cercare i valori dell'esponente n che servono per darci i numeri perfetti osserviamo che dovendo essere $(2^{n+1} - 1)$ un numero primo, tale dovrà essere anche $n + 1$ poi che se fosse $n + 1 = pq$ (essendo p e q numeri interi troveremmo

$$2^{n+1} - 1 = (2^p)^q - 1 = (2^p - 1)[(2^p)^{q-1} + (2^p)^{q-2} + \ldots + 2^p + 1]$$

uguaglianza che mostra come $(2^{n+1} - 1)$ è divisibile per $(2^p - 1)$ e quindi non è primo. Tale condizione non è però sufficiente perchè ad esempio per il valore $n + 1 = 11$ si ha $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$ ossia non si ha un numero primo. Per trovare i numeri perfetti si deve dunque, dando all'esponente $(n + 1)$ valori che siano numeri primi, vedere quali tra essi rendano primo il numero $(2^{n+1} - 1)$ e poi applicare la formola di Euclide. I primi numeri perfetti si ottengono dando ad $(n + 1)$ i valori

$$2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 13;\ 17;\ 19;\ 31,$$

ossia sono i numeri

$$6;\ 28;\ 496;\ 8128;\ 33.550.336;\ 8.589.869.056;$$
$$137.438.691.328;\ 2.305.843.008.139.952.128.$$

Mersenne [1] afferma che i valori consecutivi di $(n + 1)$ che servono per avere numeri perfetti sono 67, 127, 257 e che nessun altro numero minore di 257 può dare numeri perfetti: sembra dunque che egli avesse un metodo per questa ricerca, che noi però non conosciamo. Il Lucas però crede in seguito a suoi lunghi calcoli, che neppure per $(n + 1) = 67$ si ottenga un numero perfetto. Egli enuncia anzi il teorema che, se il numero primo $(n + 1)$ è uguale a un multiplo di 4 diminuito di un'unità, e se $2n + 1$ è anche primo, il numero $(2^{n+1} - 1)$ è divisibile per $(2n + 1)$ e quindi non è primo e non dà luogo a numeri perfetti.

Quanto poi alle cifre con cui terminano i numeri perfetti ossserviamo che essendo quelli che noi consideriamo del tipo $2^n(2^{n+1} - 1)$ ove $(n + 1)$ è primo e quindi dispari, sarà n pari, e quindi la formola generale di essi, escluso il numero 6 che si ha per $n = 1$ è $4^p(2 \times 4^p - 1)$ essendo $p = \frac{1}{2}n$. Osservo allora che le potenze 4^p per p pari terminano per uno dei gruppi

$$16,\ 56,\ 96,\ 36,\ 76$$

nel qual caso il fattore $(2 \times 4^p - 1)$ termina rispettivamente per i gruppi

$$31,\ 11,\ 91,\ 71,\ 51$$

e il numero perfetto risultante per

$$96,\ 16,\ 36,\ 56,\ 76.$$

Le potenze 4^p per p dispari terminano per

$$64,\ 24,\ 84,\ 44,\ 04$$

nel qual caso il fattore $(2 \times 4^p - 1)$ termina per

$$27,\ 47,\ 67,\ 87,\ 07$$

(1) Prefazione dei *Cogitata phisico-mathematica.* (Parigi, 1644.)

e il numero perfetto risultante sempre per 28. Abbiamo così che tutti i numeri perfetti dati dalla formola di Euclide (escluso il numero 6) terminano per uno dei gruppi di cifre 16, 28, 36, 56, 76, 96. Anzi nessun altro numero perfetto oltre a 496 termina per 96. (Vedi *Mathesis*, tomo IX.)

Una notevole proprietà di questi numeri perfetti si è che moltiplicandoli per 8 e aggiungendo al prodotto l'unità si ottiene un quadrato perfetto. Infatti

$$2^n(2^{n+1}-1)\times 8+1=(2^{2n+1}-2^n)2^3+1=(2^{n+2})^2-2\times 2^{n+2}+1=(2^{n+2}-1)^2.$$

2. Abbiamo sinora trovato la formola di Euclide che ci dà i numeri perfetti pari, e abbiamo anche dimostrato che ogni numero perfetto pari sodisfa alla formola di Euclide. Una questione che ha molto interessato tutti i matematici i quali si sono occupati di questo argomento, ma che finora non è stata risolta è quella della ricerca dei numeri perfetti impari.

Descartes credeva alla loro esistenza, come si rileva dal brano di una sua lettera a Frénicle in cui dice: « Io non so perchè crediate che non si potrebbe « giungere con questo mezzo a trovare un numero perfetto: se ne avete una « dimostrazione, confesso che essa è superiore alla mia capacità, e che la stimo « straordinariamente, perchè io per me credo che si possano trovare numeri « impari veramente perfetti ». (20 Dicembre 1638.)

Su questi eventuali numeri perfetti impari esiste un teorema il quale dice che se esistono numeri perfetti impari, essi sono del tipo $N=a^{4n+1}i^2$ ove a è un numero primo e i è un numero impari diverso da 1 e sia divisibile per a. Infatti sia $a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots$ l'espressione del nostro numero perfetto N decomposto ne' suoi fattori primi. Posto

$$\begin{aligned}A&=1+a+a^2+\ldots+a^\alpha,\\B&=1+b+b^2+\ldots+b^\beta,\\C&=1+c+c^2+\ldots+c^\gamma,\\&\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

il prodotto ABC... dà tutti i divisori di N compreso N stesso: essendo N un numero perfetto, sarà

$$N=ABC\ldots-N \qquad \text{ossia} \qquad 2N=ABC\ldots..$$

Dovendo il prodotto ABC..., diviso per 2 dare il numero impari N, tutti i suoi fattori devono essere impari, tranne uno, e sia A, che deve essere il doppio di un numero impari. Ma perchè

$$\begin{aligned}B&=1+b+b^2+\ldots+b^\beta,\\C&=1+c+c^2+\ldots+c^\gamma,\\&\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

siano impari, occorre, essendo $b, c, \ldots$ e quindi le loro potenze numeri impari, che siano in numeri impari i termini di quelle somme, cioè che siano impari i numeri $\beta+1$, $\gamma+1,\ldots$. Così essendo $A=1+a+a^2+\ldots+a^\alpha$ un numero pari ma doppio di un numero impari, occorre che il numero $\alpha+1$ dei termini del secondo membro sia pari ma doppio di un numero impari, cioè che sia $\alpha+1=2[2n+1]$, onde $\alpha=4n+1$. Ricaviamo come espressione del numero perfetto $N=a^{4n+1}b^\beta c^\gamma\ldots$, ove n è un numero intero e $\beta, \gamma\ldots$ sono numeri pari (zero incluso). Osserviamo però che i numeri $\beta, \gamma\ldots$ non possono essere tutti nulli contemporaneamente poichè in tal caso avremmo

$$N=a^\alpha=1+a+a^2+\ldots+a^\alpha=\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1},$$

onde $a^{\alpha+1} - a = a^{\alpha+1} - 1$, ossia $a = 1$ che darebbe $N = 1$. Il prodotto $b^{\beta} c^{\beta} \ldots$ è dunque il quadrato di un numero impari i diverso da 1, e quando si ha come forma del numero perfetto $N = a^{4n+1} i^2$.

Nell'enunciato del teorema si è detto che i non deve essere divisibile per a, poichè se a dividesse i, dovrebbe dividere anche $b^{\beta} c^{\gamma} \ldots$, mentre tra i fattori primi di questo numero non compare il numero primo a. Osserviamo poi che siccome ogni numero impari, e perciò in particolare il numero a, elevato a un esponente del tipo $4n + 1$ dà come risultato un numero del tipo $4q + 1$, come è facile verificare, e che ogni quadrato di numeri impari, come sarebbe i^2, è pure del tipo $4q + 1$, ne consegue che anche il numero perfetto impari $N = a^{4n+1} i^2$ è del tipo $4q + 1$ ossia che non esistono numeri perfetti impari della forma $4q + 3$.

Resta ancora a vedere tra i numeri impari del tipo $4q + 1$ se esistono dei numeri perfetti e quali siano. Il teorema che abbiamo enunciato è dovuto a Lionnet, [1] il quale si limita a enunciarlo senza dimostrarlo: la dimostrazione che ne abbiamo data si trova nella *Théorie des nombres* di Lucas. Il Lionnet aggiunge inoltre, nè il Lucas lo dimostra, che il numero a (primo e perciò impari) che può essere quindi del tipo $4q + 1$ o $4q + 3$ è del tipo $4q + 1$.

8. Nella stessa nota il Lionnet oltre ai numeri perfetti di cui sinora ci siamo occupati, che egli chiama numeri perfetti di prima specie, introduce un'altra sorta di numeri perfetti, che dice di seconda specie, definendoli come quei numeri che sono uguali al prodotto di tutti i loro divisori esclusi se stessi: esempi di tali numeri sono

$$8 = 1 \times 2 \times 4; \quad 10 = 1 \times 2 \times 5; \quad 14 = 1 \times 2 \times 7; \quad 27 = 1 \times 3 \times 9, \text{ ecc.}$$

Osserviamo anzi tutto a questo proposito che anche tra i numeri perfetti di seconda specie non ci può essere evidentemente nessun numero primo, che abbia per unico divisore diverso da sè, l'unità: vediamo invece se tra i numeri perfetti di seconda specie ne esista qualcuno che sia n-esima potenza di un numero primo, cioè se può darsi che sia, indicando con p un numero primo,

$$p^n = 1 \cdot p \cdot p^2 \ldots p^{n-1};$$

affinchè ciò accada deve essere

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) = n,$$

cioè $\frac{n(n-1)}{2} = n$ il che ci dà $n = 3$.

Sono dunque numeri perfetti di seconda specie tutti i cubi dei numeri primi.

Indicando poi con p e p' due numeri primi diversi, vediamo se può essere numero perfetto di seconda specie un numero del tipo app' ove a è un intero qualunque. Se fosse $a > 1$, allora ap e ap' dividerebbero entrambi il numero app': ma il loro prodotto a^2pp' supera il numero stesso, mentre ne sarebbe inferiore se fosse $a < 1$: perchè dunque app' sia un numero perfetto occorre che sia $a = 1$: si ha dunque per i numeri perfetti di seconda specie, che non sono cubi di numeri primi, ancora la sola ipotesi che siano prodotti di due numeri primi disuguali. Essendo dunque p e p' numeri primi, i numeri perfetti di seconda specie sono della forma p^3 o della forma pp'.

---

(1) *Nouvelles Annales de Math.* Serie II, Anno 1879, pag. 306.

Volendo poi cercare se esistono numeri doppiamente perfetti, cioè numeri che siano somma e prodotto dei loro fattori, è chiaro che nessun numero perfetto di seconda specie del tipo p^3 può essere numero perfetto di prima specie, poi che i suoi fattori diversi da esso sono

$$1, p, p^2 \quad \text{e} \quad 1+p+p^2=\frac{p^3-1}{p-1}<p^3.$$

Quanto poi ai numeri del tipo pp', i loro fattori diversi dal numero stesso sono 1, p, p', affinchè sia $pp'=1+p+p'$, occorre che, siccome p e p' dividono il primo membro, dividano anche il secondo, ossia che dividano rispettivamente $(p'+1)$ e $(p+1)$. Dovrà dunque essere

$$p \leqq p'+1; \qquad p' \leqq p+1;$$

evidentemente non può darsi che in entrambi i casi si abbia il segno dell'uguaglianza: supponiamo dunque che sia $p<p'+1$: allora, essendo p e p' diversi, sarà $p<p'$; dovendo essere anche $p' \leqq p+1$ se ne deduce che è $p'=p+1$; dunque p e p' sono numeri consecutivi; ma gli unici due numeri consecutivi e primi sono 2 e 3, onde il solo numero doppiamente perfetto è il numero 6.

4. Finora ci siamo, come in generale si è fatto da tutti gli autori in questa teoria, limitati al campo dei numeri naturali, cioè dei numeri interi e positivi; il Lionnet [1] estende anche ai numeri negativi la denominazione di numeri perfetti, ed osservando che al cambiare di segno di un numero, cambiano di segno anche i suoi divisori, mentre le loro somme e il loro prodotto conservano lo stesso valore assoluto, conclude che gli unici numeri doppiamente perfetti sono 0, $+6$, -6.

Se non ci si limita però al campo dei numeri positivi, allora si possono considerare come divisori del numero non solo quei numeri interi tali che dividendo per essi il numero si ottenga come quoziente un numero intero positivo, come fa il Lionnet, ma anche quelli che dànno, quando si divida per essi il numero proposto, un quoziente intero negativo. Allora con ogni divisore di un numero viene a comparire anche il suo opposto; è chiaro che sotto questo punto di vista, siccome la somma dei divisori (numeri due a due opposti, escludendo tra i divisori del numero oltre al numero stesso il suo opposto uguale in valore assoluto) è nulla, non si ottiene nessun numero perfetto di prima specie ad eccezione di 0. Quanto ai numeri perfetti di seconda specie, indicando con p un numero primo, è chiaro che affinchè sia p^n un numero perfetto, dovrà essere

$$p^n = 1\,.\,p\,.\,p^2\,.\,p^3 \ldots p^{n-1}\,.\,(-1)(-p)(-p^2)\ldots(-p^{n-1}) = (-1)^n p^2 p^4 \ldots p^{2(n-1)},$$

dovrà quindi essere

$$2+4+\ldots+2(n-1)=n \qquad \text{ossia} \qquad n=n(n-1)$$

il che ci dà $n=2$.

Per $n=2$ l'uguaglianza è vera anche in segno, onde abbiamo che i quadrati dei numeri primi sono, sotto questo nuovo punto di vista, numeri perfetti di seconda specie.

Nè oltre ad essi ce ne sono altri, come sarebbe facile verificare ripetendo con le opportune modificazioni il ragionamente fatto più sopra, con cui il Lionnet giunge alla seconda forma dei numeri perfetti di seconda specie, prodotti di due numeri primi disuguali.

G. GIRAUD
Torino.

(1) In una nota alla memoria citata.

Sull' indice minimo di N relativo a p.

1. Dato un numero A, un gruppo di cifre C ed un numero p primo con la base del sistema di numerazione prescelto, ci proponiamo di determinare il minimo numero di volte che occorre scrivere a destra di A il gruppo C per avere un numero congruo ad A secondo il modulo p, e quindi, nel caso di A multiplo di p, un numero multiplo di p. Così potremo occuparci tra l'altro del teorema di Plateau, esposto nella forma più generale di cui sia suscettibile: dato nel sistema di numerazione a base g un qualsiasi gruppo di cifre del sistema, e dato un numero p primo con g, esistono infiniti multipli di p che nel dato sistema si scrivono ripetendo quel gruppo, ossia scrivendo in seguito l'uno dell'altro gruppi di cifre identici al dato.

2. In quanto segue, dunque, g è la base del sistema di numerazione prescelto, e p è un qualsiasi numero primo con detta base. Con A e C rappresenteremo ordinatamente due gruppi di α e γ cifre, nonchè, quando non c'è pericolo di equivoco, i numeri da essi gruppi rappresentati; con N il *numero* che si ottiene scrivendo, in seguito al gruppo A, infinite volte il gruppo C. Il simbolo N_k (*ridotta* k-esima di N) starà a rappresentare il numero che si ottiene cancellando in N tutt'i *periodi* che vengono dopo il k-esimo, k essendo un intero qualsiasi positivo. Col simbolo N_0 rappresenteremo il numero che si ottiene cancellando in N tutta la parte periodica, cosicchè N_0 è uguale ad A. Così, posto, per es.

$$N = 3425030303...$$

o più brevemente

$$N = 3425(03)$$

abbiamo

$$A = 3425; \quad C = 03; \quad \alpha = 4; \quad \gamma = 2;$$
$$N_0 = 3425; \quad N_1 = 342503; \quad N_2 = 34250303; \ldots$$

Dunque nella *serie di ridotte*

$$N_0, \ N_1, \ N_2, \ldots, N_k, \ldots \tag{1}$$

ogni elemento si ottiene dal precedente scrivendo alla sua destra il periodo. Così che qualunque sia i abbiamo

$$N_{i+1} = N_i g^{\gamma} + C. \tag{2}$$

3. *La congruenza.*

$$N_x - N_0 \equiv 0 \quad (\text{mod } p) \tag{3}$$

ammette infinite soluzioni oltre quella evidente $x = 0$.

1. Supponiamo che s'abbia $N_1 - N_0 \equiv 0$ (mod p) ossia

$$N_1 \equiv N_0 \quad (\text{mod } p). \tag{4}$$

Dalla (2) ricaviamo intanto le due eguaglianze

$$N_1 = N_0 g^\gamma + C; \qquad N_2 = N_1 g^\gamma + C$$

e da queste la congruenza

$$N_2 - N_1 \equiv (N_1 - N_0) g^\gamma \qquad (\text{mod } p),$$

che per la (4) diventa $N_2 - N_0 \equiv 0 \ (\text{mod } p)$.

Analogamente si proverebbe che, sempre rispetto al modulo p, han luogo le congruenze

$$N_3 - N_0 \equiv 0; \qquad N_4 - N_0 \equiv 0; \quad \text{ecc.}$$

Dunque è chiaro che se la data congruenza è soddisfatta da $x=1$, è pure soddisfatta da $x=k$, k rappresentando un intero qualsiasi.

2. Supponiamo invece che non sia $N_1 - N_0 \equiv 0 \ (\text{mod } p)$. Posto

$$r_i = \text{rest}\,(N_i;\ p)$$

con $i=0, 1, 2, \ldots$, possiamo subito scrivere

$$r_i \equiv N_i \qquad (\text{mod } p)$$

e quindi, per la (2)

$$r_{i+1} \equiv r_i g^\gamma + C \qquad (\text{mod } p) \tag{5}$$

qualunque sia l'intero i.

Per la fatta ipotesi i primi due elementi della serie

$$r_0, \quad r_1, \quad r_2, \quad r_3, \ldots \tag{6}$$

sono disuguali; ma come i primi due, non possono *tutti* essere distinti, perchè sono minori di p, ed il numero degl'interi minori di p è limitato. Supponiamo che il gruppo più esteso avente elementi tutti distinti sia il seguente

$$r_0, \quad r_1, \ldots, r_{m-1}. \tag{7}$$

Sarà r_m identico ad uno degli elementi di questo gruppo. Ma non può aversi $r_m = r_t$ con t compreso fra 0 ed m, perchè, allora, siccome si hanno per la (5) le congruenze.

$$\begin{aligned} r_m &\equiv r_{m-1} g^\gamma + C \qquad (\text{mod } p) \\ r_t &\equiv r_{t-1} g^\gamma + C \qquad\quad " \end{aligned}$$

sottraendo membro a membro otterremmo la congruenza

$$0 \equiv (r_{m-1} - r_{t-1}) g^\gamma \qquad (\text{mod } p)$$

e quindi (dacchè g^γ e p sono primi fra loro) anche l'altra

$$0 \equiv r_{m-1} - r_{t-1} \qquad (\text{mod } p)$$

da cui scaturirebbe l'eguaglianza $r_{m-1}=r_{t-1}$ con $t-1$ intero compreso fra -1 ed $m-1$, contraddicente all'ipotesi fatta sul gruppo (7).

Dunque non può essere che questo soltanto: $r_m = r_0$. Ed ora, sol che si ripensi al calcolo ricorrente degli elementi della serie (6), si capirà subito come in questa si ripetano all'infinito e nello stesso ordine gli elementi del gruppo (7).

Da ciò scende immediatamente che l'elemento r_i è uguale ad r_0 per gl'infiniti valori di i multipli di m, e per essi soltanto. In altri termini si ha $N_i - N_0 \equiv 0 \pmod p$ per gl'infiniti valori di i multipli di m, e per essi soltanto. Il teorema resta così esaurientemente dimostrato.

Osservazione. — La minima radice non nulla della congruenza $N_x - N_0 \equiv 0 \pmod p$ verrà indicata con λ, e godrà, in quanto segue, di una parte importantissima. A λ daremo il nome di minimo indice di N relativo a p. Dunque per *indice minimo di* N *relativo a* p intendiamo il grado della minima ridotta di N congrua ad N_0 secondo il modulo p.

4. Pensando che N_x si ottiene scrivendo x volte di seguito il gruppo C di γ cifre a destra di N_0, possiamo subito scrivere

$$N_x = N_0 g^{x\gamma} + C(1 + g^\gamma + g^{2\gamma} + \ldots + g^{(x-1)\gamma})$$

ovvero

$$N_x = N_0 g^{x\gamma} + C \frac{g^{x\gamma} - 1}{g^\gamma - 1}. \tag{8}$$

Ciò posto, l'indice minimo di N relativo a p, ossia il numero λ, essendo la minima radice della congruenza $N_x - N_0 \equiv 0 \pmod p$, è anche, per la (8), la minima radice della congruenza

$$N_0 g^{x\gamma} + C \frac{g^{x\gamma} - 1}{g^\gamma - 1} - N_0 \equiv 0 \qquad \pmod p$$

che con facile trasformazione diventa

$$\frac{g^{x\gamma} - 1}{g^\gamma - 1}(C + N_0 g^\gamma - N_0) \equiv 0 \qquad \pmod p$$

e poi, per via dell'uguaglianza $C + N_0 g^\gamma = N_1$, assume la forma

$$\frac{g^{x\gamma} - 1}{g^\gamma - 1}(N_1 - N_0) \equiv 0 \qquad \pmod p. \tag{9}$$

Se $N_1 - N_0$ è multiplo di p, qualunque numero intero evidentemente soddisfa la congruenza (9), e quindi la minima sua soluzione è 1 (cfr. § 3). Siffatto valore dunque è determinabile senz'altro. Supponendo invece che $N_1 - N_0$ non sia multiplo di p, il m. c. d. di $N_1 - N_0$ e p sarà diverso da p; chiamiamolo ρ. Alla congruenza (9) si potrà sostituire la sua equivalente

$$\frac{g^{x\gamma} - 1}{g^\gamma - 1} \equiv 0 \qquad \left(\mathrm{mod}\ \frac{p}{\rho}\right). \tag{10}$$

Dunque: o λ, indice minimo di N relativo a p, è 1, ovvero è la radice minima della congruenza (10).

Osservazione 1ª. — Tutte le alterazioni nella grandezza dei gruppi A e C che, lasciando intatto γ, non alterano il m. c. d. di $N_1 - N_0$ e p, lasciano invariato λ; perchè, o quel m. c. d. è p, ed allora sarà

sempre $\lambda = 1$, ovvero è minore di p, ed allora λ è la minima radice della congruenza

$$\frac{g^{x\gamma}-1}{g^{\gamma}-1} \equiv 0 \qquad \left(\mathrm{mod}\ \frac{p}{\rho}\right)$$

che dipende soltanto da γ e da ρ.

Osservazione 2ª. — Quando $g^{\gamma}-1$ e $\frac{p}{\rho}$ fossero primi fra loro, λ com'è radice minima della (10) sarebbe anche radice minima della congruenza $g^{x\gamma}-1 \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\ \frac{p}{\rho}\right)$, equivalente alla (10). Ma, pel teorema di Fermat, tra i valori di $x\gamma$ è $\varphi\left(\frac{p}{\rho}\right)$; dunque λ sarebbe divisore di $\varphi\left(\frac{p}{\rho}\right)$.

5. Se la radice minima della congruenza

$$\frac{g^{x\gamma}-1}{g^{\gamma}-1} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p) \tag{11}$$

è $2d$, d non sarà radice della stessa, ossia $\frac{g^{d\gamma}-1}{g^{\gamma}-1}$ non sarà multiplo di p. Cosicchè, se p si suppone primo, sarà $\frac{g^{d\gamma}-1}{g^{\gamma}-1}$ primo con p e qnindi, avendosi per ipotesi

$$\frac{g^{2d\gamma}-1}{g^{\gamma}-1} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p),$$

ossia

$$\frac{(g^{d\gamma}+1)(g^{d\gamma}-1}{g^{\gamma}-1} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

si avrà pure

$$g^{d\gamma}+1 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p).$$

Dunque se p è primo e λ è pari, $\frac{\lambda}{2}$ è radice della congruenza $g^{x\gamma}+1 \equiv 0$ (mod p). Nel caso che oltre ad essere p primo e λ pari, fosse $g^{\gamma}-1$ non multiplo di p e quindi primo con esso, $\frac{\lambda}{2}$ sarebbe la minima radice di detta congruenza. Difatti se per $\mu < \frac{\lambda}{2}$ si avesse $g^{\mu\gamma}-1 \equiv 0$ (mod p), si avrebbero, secondo lo stesso modulo p, le seguenti congruenze

$$g^{\mu\gamma} \equiv 1\,; \quad g^{2\mu\gamma} \equiv 1\,; \quad g^{2\mu\gamma}-1 \equiv 0\,; \quad \frac{g^{2\mu\gamma}-1}{g^{\gamma}-1} \equiv 0$$

ossia 2μ (minore di λ) sarebbe radice della (11) il che contraddice alla ipotesi

6. *Se è* $\frac{p}{\rho} = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \ldots \times p_k$ *con* $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ *primi fra loro a due a due, e se* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$ *sono le radici minime della*

$$\frac{g^{x\gamma}-1}{g^{\gamma}-1} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ y) \tag{ω}$$

per $y = p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$, *sarà* $\lambda = m.\,m.\,c.\,(\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_k)$ *la radice minima della* (ω) *per* $y = \frac{p}{\rho}$.

Per quanto è stato detto alla pag. 2, la differenza $N_\lambda - N_0$ è multipla di ciascuno dei numeri $p_1, p_2, \ldots, p_k$, e quindi del loro prodotto $\frac{p}{\rho}$. Non può poi essere $N_\mu - N_0$ multiplo di $\frac{p}{\rho}$ per $\mu < \lambda$ perchè sarebbe $N_\mu - N_0$ multiplo di ciascuno dei numeri $p_1, p_2, p_3, \ldots p_k$, divisori di $\frac{p}{\rho}$, e quindi sarebbe μ multiplo comune degl'indici minimi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$, contrariamente all'ipotesi che pone

$$\lambda = \text{m. m. c.}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k).$$

Dunque λ è la minima radice non nulla della congruenza

$$N_x - N_0 \equiv 0 \left(\text{mod}\ \frac{p}{\rho}\right)$$

ossia dell'altra

$$\frac{g^{x\gamma} - 1}{g^\gamma - 1} \equiv 0 \qquad \left(\text{mod}\ \frac{p}{\rho}\right). \tag{12}$$

7. *Dette δ e λ ordinatamente le minime radici delle congruenze*

$$\frac{g^x - 1}{g - 1} \equiv 0 \quad (12) \quad \text{e} \quad \frac{g^{x\gamma} - 1}{g^\gamma - 1} \equiv 0 \quad \left(\text{mod}\ \frac{p}{\rho}\right) \tag{13}$$

a) *se γ è multiplo di δ, sarà* $\lambda = \frac{p}{\rho}$, *qualunque sia la natura di* $\frac{p}{\rho}$;

b) *se γ non è multiplo di δ ed è $\frac{p}{\rho}$ numero primo, sarà*

$$\lambda = \frac{\text{m. c. m.}\,(\gamma; \delta)}{\gamma}.$$

1°. Difatti dall'ipotesi $\frac{g^\delta - 1}{g - 1} \equiv 0 \left(\text{mod}\ \frac{p}{\rho}\right)$ scende la congruenza $g^\delta - 1 \equiv 0 \left(\text{mod}\ \frac{p}{\rho}\right)$, e quindi l'altra $g^\gamma - 1 \equiv 0 \left(\text{mod}\ \frac{p}{\rho}\right)$, per via di γ multiplo di δ e quindi di $g^\gamma - 1$ multiplo di $g^\delta - 1$. Detto m un intero qualsiasi, si hanno adesso, successivamente, secondo lo stesso modulo $\frac{p}{\rho}$, le congruenze

$$g^{m\gamma} - 1 \equiv 0; \qquad g^{m\gamma} \equiv 1; \qquad \sum_{m=0}^{m=x-1} g^{m\gamma} = x.$$

Ne viene che è

$$\frac{g^{x\gamma} - 1}{g^\gamma - 1} \equiv 0 \qquad \left(\text{mod}\ \frac{p}{\rho}\right)$$

solo se è x multiplo di $\frac{p}{\rho}$. Dunque la minima radice non nulla della (13) è $\frac{p}{\rho}$; si ha cioè $\lambda = \frac{p}{\rho}$.

2°. Se γ non è multiplo di δ, siccome le radici della (12) sono tutte multiple della minima δ, fra esse non è compreso γ, cioè il quoto $\frac{g^\gamma - 1}{g-1}$ non è multiplo di p. Ma per ipotesi p è primo; dunque $\frac{g^\gamma - 1}{g-1}$ e p sono primi fra loro, ed alla (13) possiamo sostituire la congruenza ad essa equivalente.

$$\frac{g^{x\gamma}-1}{g^\gamma - 1} \cdot \frac{g^\gamma - 1}{g-1} \equiv 0 \left(\text{mod } \frac{p}{\rho}\right), \quad \text{ossia} \quad \frac{g^{x\gamma}-1}{g-1} \equiv 0 \left(\text{mod } \frac{p}{\rho}\right). \quad (14)$$

Per tanto λ, che per ipotesi è la radice minima della (13), è anche radice minima della (14). Possiamo così dire che $\lambda\gamma$ è radice della (12) e quindi è multiplo di δ; ma λ è il minimo valore di x che soddisfa la (14); dunque nella serie dei multipli di γ

$$0, \gamma, 2\gamma, 3\gamma, \ldots, \lambda\gamma, \ldots$$

è $\lambda\gamma$ il primo multiplo di δ, cioè $\lambda\gamma$ è il m. c. m. di γ e δ, e quindi si ha

$$\lambda = \frac{\text{m.c.m.}(\gamma\,;\,\delta)}{\gamma}.$$

8. Le cose dette al § 3 restano anche vere per $N_0 = 0, C = 1, \gamma = 1$, nel qual caso è

$$N_x = 1 + g + g^2 + g^3 + \ldots + g^{x-1}$$

e la congruenza

$$N_x - N_0 \equiv 0 \qquad (\text{mod } p)$$

diventa

$$1 + g + g^2 + \ldots + g^{x-1} \equiv 0 \qquad (\text{mod } p).$$

In altri termini possiamo asserire che qualunque siano a e p, purchè primi fra loro, detta $(a)_x$ la somma delle prime x potenze successive di a, a cominciare da quella ad esponente 0, ossia posto

$$(a)_x = a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + \ldots + a^{x-1} = \frac{a^x - 1}{a-1} \qquad (15)$$

la congruenza

$$(a)_x \equiv 0 \qquad (\text{mod } p^i)$$

per qualsiasi valore di i ammette infinite soluzioni oltre quella evidente $x = 0$: esse sono eguali agl'infiniti multipli della soluzione minima, che indicheremo col simbolo m_i.

9. Introducendo il simbolo definito dalla (15), l'eguaglianza evidente

$$\frac{a^r - 1}{a-1} \cdot \frac{a^{rs} - 1}{a^r - 1} = \frac{a^{rs} - 1}{a-1}$$

diventa

$$(a)_r \cdot (a^r)_s = (a)_{rs}, \qquad (16)$$

formola che utilizzeremo fra breve.

10. Si noti che qualunque siano gl'interi i e k, dei quattro numeri seguenti

$$a^{km_i}-1, \qquad a^{m_i}-1, \qquad \frac{a^{m_i}-1}{a-1}=(a)_{m_i}, \qquad p^i,$$

ognuno è multiplo del seguente, e quindi il primo è multiplo dell'ultimo, cosicchè abbiamo

$$a^{km_i}-1\equiv 0 \qquad (\text{mod } p^i)$$

donde

$$a^{km_i}\equiv 1 \qquad (\text{mod } p^i).$$

Facendo assumere a k successivamente i valori $0, 1, 2, \ldots, s-1$, con s arbitrario, e sommando le s congruenze che ne risultano abbiamo infine

$$(a^{m_i})_s\equiv s \qquad (\text{mod } p^i), \tag{17}$$

altra formola di cui presto faremo uso.

11. Ci proponiamo ora di trovare una relazione fra le radici minime m_t ed m_{t+1} nella ipotesi di p primo. Si osservi innanzi tutto che tutte le radici della congruenza $(a)_x\equiv 0 \ (\text{mod } p^{t+1})$ sono anche radici della congruenza $(a)_x\equiv 0 \ (\text{mod } p^t)$; per la qual cosa, ricordando quanto abbiamo osservato nel § 8, è m_{t+1} multiplo di m_t.

Ed ora osserviamo che o è $m_{t+1}=m_t$, e la relazione è bell'e trovata; o è $m_{t+1}\neq m_t$, e si tratta di determinare il valore del coefficiente $\nu>1$ nella eguaglianza

$$m_{t+1}=\nu m_t\,.$$

Per ipotesi m_{t+1}, e quindi νm_t è la minima radice di

$$(a)_x\equiv 0 \qquad (\text{mod } p^{t+1})$$

e quindi ν è la minima radice di

$$(a)_{xm_t}\equiv 0 \qquad (\text{mod } p^{t+1})$$

che per la (16) è equivalente all'altra

$$(a)_{m_t}(a^{m_t})_x\equiv 0 \qquad (\text{mod } p^{t+1}). \tag{18}$$

Si noti adesso: 1° che il m. c. d. di $(a)_{m_t}$ e p^{t+1}, essendo p numero primo, è della forma p^r, con $r \leqq t+1$; 2° che essendo, per ipotesi, diverse le radici minime delle due congruenze

$$(a)_x\equiv 0 \qquad (\text{mod } p^t)$$

e

$$(a)_x\equiv 0 \qquad (\text{mod } p^{t+1}),$$

$(a)_{m_t}$ è multiplo di p^t ma non di p^{t+1}; 3° che per tanto il detto m. c. d. è proprio p^t. Alla congruenza (18) resta così equivalente la congruenza

$$(a^{m_t})_x\equiv 0 \qquad (\text{mod } p). \tag{19}$$

E ν radice minima della (18) sarà quindi anche radice minima della (19). Ma questa è p, perchè la (17) mostra che $(a^{m_i})_s\equiv s \ (\text{mod } p^i)$,

congruenza che ci permette di asserire che $(a^{m_t})_s$ diventa multiplo di p per $s = p, 2p, \ldots$

Abbiamo dunque dimostrato che $\nu = p$ e quindi che

$$m_{t+1} = pm_t.$$

12. Dimostreremo adesso che se m_t ed m_{t+1} sono disuguali m_{t+2} è diverso da m_{t+1}, e quindi è $m_{t+2} = pm_{t+1}$.

Per l'osservazione fatta al § 8, m_{t+2} è multiplo di m_t; mentre per l'ipotesi fatta, essendo già m_{t+1} diverso da m_t, questo non potrà essere uguale ad m_{t+2}. In altri termini possiamo scrivere

$$m_{t+2} = sm_t \quad \text{con } s \text{ intero}, > 1.$$

Ciò posto, la (16) permette di scrivere

$$(a)_{m_{t+2}} = (a)_{sm_t} = (a)_{m_t} \cdot (a^{m_t})_s .$$

Ma è $(a)_{m_{t+2}}$ multiplo di p^{t+2} ed è p^t la massima potenza di p contenuta in $(a)_{m_t}$ perchè per ipotesi è $m_t \neq m_{t+1}$; dunque in $(a^{m_t})_s$ il p dev'essere contenuto almeno alla seconda potenza. Si ha così

$$(a^{m_t})_s \equiv 0 \qquad (\text{mod } p^2).$$

Dimostreremo che per $s = p$ la precedente congruenza è assurda. Così dalla diversità di s e p scenderà quella dei prodotti pm_t ed sm_t, ossia dei numeri m_{t+1} ed m_{t+2}, che è lo scopo al quale si mira.

Dei tre numeri

$$a^{m_t} - 1, \qquad \frac{a^{m_t} - 1}{a - 1} = (a)_{m_t}, \qquad p^t$$

ognuno è multiplo del seguente, quindi il primo è multiplo dell'ultimo, e si hanno successivamente le congruenze

$$a^{m_t} - 1 \equiv 0 \quad (\text{mod } p^t); \qquad a^{m_t} \equiv 1 \quad (\text{mod } p^t).$$

Possiamo per tanto porre

$$a^{m_t} = 1 + \rho p^t$$

con ρ intero non nullo.

Dovendo mostrare che non può essere $(a^{m_t})_p \equiv 0)$ (mod p^2) dobbiamo mostrare dunque che non può aversi

$$(1 + \rho p^t)_p \equiv 0 \qquad (\text{mod } p^2). \tag{20}$$

Abbiamo

$$(1 + \rho p^t)^0 = 1$$
$$(1 + \rho p^t)^1 = 1 + \rho p^t$$
$$(1 + \rho p^t)^2 = 1 + 2\rho p^t + \rho^2 p^{2t}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(1 + \rho p^t)^{p-1} = 1 + \binom{p-1}{1}\rho p^t + \binom{p-1}{2}\rho^2 p^{2t} + \ldots + \binom{p-1}{p-1}\rho^{p-1} p^{(p-1)t}.$$

Sommando membro a membro queste p eguaglianze, e ricordando che nel triangolo di Tartaglia un numero posto nella colonna h-esima

e nella linea k-esima è la somma di tutt'i numeri delle linee precedenti, posti nella colonna $(h-1)$-esima, si ha

$$(1+\rho p^t)_p = \sum_{i=0}^{i=p-1} \binom{p}{i+1} \rho^i p^{it}.$$

Ora si noti che, p essendo primo, $\binom{p}{i+1}$ è uguale a p per $i=0$, ad un multiplo non nullo di p per $i<p-1$, e ad 1 per $i=p-1$. Dunque nel secondo membro dell'ultima eguaglianza troviamo come primo termine p, come ultimo $\rho^{p-1}p^{(p-1)t}$; e tutti gli altri sono multipli di p^2 per via dei coefficienti multipli di p e di t che non può essere minore di 1.

Nella congruenza (20) possono sopprimersi detti termini multipli del modulo p^2, cosicchè in ultima analisi si ha da dimostrare assurda la congruenza

$$p+\rho^{p-1}p^{(p-1)t} \equiv 0 \qquad (\text{mod } p^2).$$

Noi mostreremo assurda perfino quest'altra

$$p+\rho^{p-1}p^{(p-1)t} \equiv 0 \qquad (\text{mod } p).$$

È evidente che solo se si verificassero contemporaneamente le seguenti relazioni essa sarebbe possibile, se si avesse cioè

$$a) \qquad (p-1)t=1; \qquad 1+\rho^{p-1} \equiv 0 \qquad (\text{mod } p).$$

Le condizioni $a)$ si trasformano nelle seguenti

$$p-1=1;\ t=1; \qquad 1+\rho \equiv 0 \qquad (\text{mod } p)$$

e quindi nelle altre

$$p=2; \qquad t=1; \qquad \rho = \text{numero dispari}.$$

Si ricordi adesso che abbiam posto $a^{m_t}=1+\rho p^t$, e che nel caso di $t=1$ e $p=2$ si avrebbe $\rho=\dfrac{a^{m_1}-1}{2}$. Si noti ancora che dovendo a essere primo con p, nel caso di $p=2$ dovrebbe a essere dispari, e quindi sarebbe $1+a$ numero pari, si avrebbe cioè $a^0+a^1=(a)_2\equiv 0$ (mod. p), donde verrebbe $m_1=2$. Per tanto possiamo asserire che le relazioni $a)$ valgono le seguenti

$$t=1; \quad p=2; \quad \frac{a^2-1}{2} = \text{numero dispari}.$$

L'ultima non può *mai* verificarsi perchè, essendo a dispari, i numeri $a+1$ ed $a-1$ sono entrambi pari, e quindi è pari il numero

$$\frac{a^2-1}{2} = \frac{a-1}{2}(a+1).$$

Riassumendo: Nella serie $m_1, m_2, m_3, \ldots$, radici minime della congruenza

$$(a)_x \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p^y)$$

per $y = 1, 2, 3, \ldots$, se due elementi consecutivi sono diseguali, *tutti* gli elementi che seguono questi sono diseguali, e ciascuno è uguale al prodotto del precedente per p.

Per tanto, se ammettiamo che i primi t elementi di detta serie abbiano un comune valore, ed il $(t+1)$-esimo abbia valore diverso, possiamo scrivere

$$m_{t+1} = m_t p = m_1 p\,;\quad m_{t+2} = m_{t+1} p = m_1 p^2\,;\quad m_{t+3} = m_{t+2} p = m_1 p^3\,; \ldots$$

Si ha cioè, in generale

$$m_k = m_1 \frac{p^k}{p^t}$$

e quindi il teorema: *La minima radice della congruenza*

$$(a)_x \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p^k),$$

se p *è primo è uguale al prodotto della minima radice* m_1 *della congruenza*

$$(a)_x \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

pel quoziente di p^k *per* p^t, *che è la massima potenza di* p *contenuta in* $(a)_{m_1}$.

13. In quanto segue ci occupiamo del procedimento da seguire per calcolare l'indice minimo di N relativo ad un qualsiasi numero p.

Se $N_1 - N_0$ è multiplo di p, il chiesto indice minimo è 1.

Nel caso contrario noi sappiamo (§ 4) che detto indice minimo è la minima radice di

$$\frac{g^{x\gamma} - 1}{g^\gamma - 1} \equiv 0 \qquad \left(\text{mod. } \frac{p}{\rho}\right) \tag{21}$$

con

$$\rho = \text{m. c. d. } (N_1 - N_0;\ p).$$

Scomposto $\frac{p}{\rho}$ nei suoi fattori primi, supponiamo d'aver trovato

$$\frac{p}{\rho} = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_t^{a_t}.$$

Pel teorema del § 6 è subito calcolabile la radice minima della (21) se son note le radici minime della

$$\frac{g^{x\gamma} - 1}{g^\gamma - 1} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } y) \qquad (\text{per } y = p_1^{a_1}\,;\ p_2^{a_2}\,; \ldots) \tag{22}$$

che, per quanto abbiam detto qui sopra, sono ricavabili dalle radici minime della (22) per $y = p_1\,;\ p_2\,; \ldots;\ p_t$.

Infine il § 7 suggerisce un semplice procedimento per calcolare questi ultimi valori in funzione delle radici minime della congruenza

$$\frac{g^x - 1}{g - 1} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } y) \tag{23}$$

per $y = p_1\,;\ p_2\,; \ldots;\ p_t$.

(A questa congruenza è equivalente l'altra $g^x - 1 \equiv 0$ (mod. y) se y è primo con $g - 1$).

Si tratta in fondo, come si vede, di conoscere la radice minima di

$$1 + g + g^2 + g^3 + \ldots + g^{x-1} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } y)$$

per y eguale ad un numero primo, ossia il minimo numero di volte che bisogna scrivere di seguito la cifra 1 per avere, nel sistema a base g, un numero multiplo di detto numero primo.

Dalle cose dette in questo paragrafo scende che, scelto un sistema di numerazione, poniamo di base g, se in una tavola di numeri primi scrivessimo, accanto ad ogni numero primo, il numero che esprime quante volte (al minimo) bisogna scrivere di seguito la prima cifra significativa del sistema per avere un numero multiplo di esso numero primo, s'avrebbe quanto basterebbe pel calcolo immediato dell'indice minimo di N corrispondente a qualsiasi numero p, i cui fattori primi fossero compresi nella tavola.

Nota: per $g = 10$ e per y diverso da 2, 3, 5 le radici minime della (23) coincidono con i numeri " n " del Bettini (vedasi il tomo XII, a. 1897 del *Periodico di Matematica*, e specialmente la tavola del § 8).

14. Esercizio. — *Quante volte, nel sistema di numerazione decimale, in seguito a 292 bisogna scrivere il gruppo 045 per avere il minimo numero congruo a 292 secondo il modulo* $p = 3^4 \times 7^2 \times 11^6$?

$$\text{Qui è } \gamma = 3;\ N_1 - N_0 = 292045 - 292 = 291753 = 3^2 \times 7 \times 11 \times 421;$$

$$\rho = \text{m. c. d.}(N_1 - N_0\,; p) = 3^2 \times 7 \times 11\,; \qquad \frac{p}{\rho} = 3^2 \times 7 \times 11^5.$$

La congruenza

$$\frac{g^x - 1}{g - 1} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } y).$$

per $y = 3\,; 7\,; 11$ ha per radici minime ordinatamente i numeri 3, 6, 2. Ed allora le radici minime della congruenza

$$\frac{g^{3x} - 1}{g^3 - 1} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } y) \tag{24}$$

per $y = 3\,; 7\,; 11$ sono ordinatamente (§ 7)

$$3\,; \quad \frac{\text{m. m. c.}(3\,;6)}{3} = 2\,; \quad \frac{\text{m. m. c.}(3\,;2)}{3} = 2.$$

Per tanto, e pel § 11, le radici minime della (24) per $y = 3^2\,; 7\,; 11^5$ sono ordinatamente

$$\frac{3^2}{3} \cdot 3 = 3^2; \qquad 2; \qquad \frac{11^5}{11} \cdot 2 = 11^4 \cdot 2\,.$$

Essendo infine m. m. c. $(3^2; 2; 11^4 \times 2) = 2 \times 3^2 \times 11^4$, possiamo concludere (§ 6) che la radice minima della

$$\frac{g^{8x}-1}{g^8-1} \equiv 0 \qquad \left(\text{mod. } \frac{p}{\rho}\right)$$

e quindi (§ 4) la radice minima della

$$N_x - N_0 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

è $2 \times 3^2 \times 11^4 = 263538$.

15. Teorema di Plateau generalizzato. — *Dato un gruppo qualsiasi di cifre* C *e dato un qualsiasi numero* p *primo con* g, *base del sistema di numerazione usato, esistono infiniti numeri della forma* CC...C *multipli di* p.

Se il numero rappresentato dal gruppo C è multiplo di p, tutt'i numeri C, CC, CCC,... sono multipli di p.

Per tanto in ciò che segue supporremo C rappresentante un numero non multiplo di p.

Posto nella teoria generale $N_0 = 0$, $N_1 = C$, la condizione $N_0 \equiv N_1$ (mod. p) non essendo soddisfatta perchè supponiamo diversa da 0 almeno qualcuna delle cifre del gruppo C, esiste (§ 3) un numero $\lambda > 1$ per cui

$$N_i \equiv N_0 \qquad (\text{mod. } p)$$

sempre e solo quando i è multiplo di λ. Trasportando questi risultati della teoria generale al caso nostro, abbiamo appunto $N_0 = 0$ ed $N_i = C_i$, rappresentando C_i il numero formato da i gruppi identici al dato C. Dunque abbiamo

$$C_i \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

ossia qualsiasi numero della forma CC...C sarà multiplo di p purchè il numero dei gruppi C che lo costituiscono sia multiplo di λ. Il numero λ dice quanti sono gli elementi della (6) tutti distinti fra loro; o, che è lo stesso, qual'è il *minimo* numero di volte che bisogna scrivere di seguito il gruppo C per avere un numero multiplo di p.

Pel calcolo di λ rimandiamo il lettore a quanto abbiamo esposto nei §§ 13 e 14.

16. In un sistema di numerazione a base g:

se un numero U *si spezza graficamente in* h *parti delle quali la prima abbia un numero qualsiasi di cifre e tutte le rimanenti ne abbiano* c *per una, la somma di tutte queste parti è congrua ad* U *secondo il modulo* $g^c - 1$.

Difatti, detta u_i la parte seguita in U da altre i parti, si ha

$$U = \sum_{i=0}^{i=h-1} u_i g^{ic}$$

e quindi anche

$$U = \sum_{i=0}^{i=h-1} u_i(g^{ic} - 1) + \sum_{i=0}^{i=h-1} u_i .$$

Ma il 2° dei tre termini di quest'eguaglianza è multiplo di $g^c - 1$; dunque

$$U \equiv \sum_{i=0}^{i=h-1} u_i \quad (\text{mod. } g^c - 1). \tag{25}$$

Ciò posto, pel § 15 la congruenza

$$g^x - 1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

con p primo con g, ammette infinite soluzioni; cioè esistono infiniti numeri multipli di p scritti con sole cifre eguali alla massima del sistema. Se qui sopra prendiamo c eguale ad una di queste soluzioni (nella pratica sarà preferita la minima) possiamo per la (25) scrivere

$$U \equiv \sum_{i=0}^{i=h-1} u_i \quad (\text{mod. } p).$$

Dunque: *In qualsiasi sistema di numerazione, un qualsiasi numero* U *è congruo (secondo un qualsiasi numero* p *primo con la base del sistema) alla somma dei numeri ottenuti dal separare, a partire da destra, finchè sia possibile, le cifre di* U *in gruppi di* c *cifre l'uno, essendo* c *il numero delle cifre di un qualsiasi multiplo di* p, *scritto con sole cifre eguali a* g — 1. (Confr. Loria: " Carattere di visibilità ecc. „ *Boll. di Mat.*, a. 1902, n. 1).

G. Calvitti.

QUISTIONI PROPOSTE

708. Data la definizione di eguaglianza posta dal Veronese nella seconda edizione del suo testo di geometria e nella terza edizione della seconda parte, si domanda se sia possibile dimostrare che in due figure eguali a tre punti allineati dell'una corrispondano tre punti allineati dell'altra.

Catania.

709. Costruire i punti di una ellisse per i quali il raggio di curvatura è eguale al semidiametro coniugato a quello che passa per il punto.

710. Sia M un punto d'un ellisse, F un fuoco, P, Q i punti d'incontro della tangente in M col circolo di raggio MF. L'area della curva luogo di P, Q è doppia di quella del cerchio che ha per diametro l'asse maggiore dell'ellisse.

711. Siano M un punto qualunque preso sulla sviluppata di un ellisse, A il piede della normale doppia e B, C i piedi delle normali semplici condotte da M all'ellisse, A' il simmetrico di A rispetto al centro dell'ellisse.

1. La retta che passa per il baricentro del triangolo ABC e per il centro dell'ellisse è parallela a BC.

2. La parallela per A a BC è normale ad un'ellisse fissa.

3. Il luogo del circumcentro, del baricentro e dell'ortocentro del triangolo ABC sono curve che hanno per aree rispettivamente

$$\frac{D}{12}, \quad \frac{E}{18}, \quad \frac{E}{2}+D,$$

E e D essendo le aree dell'ellisse e della sua sviluppata.

4. Il luogo del centro dell'iperbole equilatera circoscritta al quadrilatero ABCA′ è una curva la cui area è $\frac{E}{8}+\frac{D}{12}$.

5. Il luogo del punto d'incontro degli assi delle due parabole circoscritte al quadrilatero ABCA′ è una curva la cui area è $\frac{E}{32}$.

6. Il luogo del centro dell'iperbole d'Apollonio relativa al punto M è una sviluppata d'ellisse: l'area di questo è $\frac{3E}{8}$.

E.-N. Barisien.

BIBLIOGRAFIA

Wieleitner. — *Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer ordnung.* (Sammlung Schubert XLIII.) Leipzig, G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, 1905.

Questo libro fa parte dell'ottima raccolta di manuali Schubert, che conta già 49 volumi pubblicati ed altri 25 in preparazione; esso è destinato, come afferma l'Autore nella prefazione, ai principianti, in quanto che si richiede solo la conoscenza dei fondamenti del calcolo differenziale, dell'algebra e della teoria delle coniche.

L'Autore non si è proposto di arricchire la scienza di nuove conquiste, ma di fornire ai giovani una introduzione allo studio della geometria superiore secondo i concetti di Schubert.

Ed ha avuto il merito di raccogliere in un volume di circa 300 pagine le parti fondamentali degli argomenti trattati nel classico libro di Salmon-Fiedler, in forma compendiosa ma chiara, tenendo conto anche dei progressi compiuti negli ultimi 20 anni.

Il volume è preceduto da un indice analitico molto dettagliato, e da una notizia bibliografica delle opere consultate per compierlo e si chiude con un indice alfabetico.

Ecco i titoli delle 14 sezioni in cui si suddivide l'opera: I. Concetti generali. — II. Teoria delle polari - Le singolarità semplici - Relazione fra ordine e classe di una curva. — III. La curva Hessiana e curve associate (Steineriana, Cayleyana).

— IV. Le formule di Plücker — V. Genere - Curve razionali. — VI. Il triangolo analitico - Assintoti - Discussione di curve. — VII. singolarità più elevate. — VIII. Trasformazione delle curve. — IX. Il principio di corrispondenza generalizzato. — X. Sistemi di punti sulle curve. — XI. Applicazione del teorema sopra i sistemi di punti. — XII. Curve del 3° ordine. — XIII. Curve del 4° ordine. — XIV. Sistemi di curve.

AMODEO. — *Vita matematica napoletana.* Studio storico, biografico, bibliografico. — Parte prima (con una tavola di ritratti fuori testo e 5 nel testo). Napoli, Gianni e figli, 1905.

In questo bellissimo volume di 216 pagine il chiaro autore, libero docente di storia delle matematiche a Napoli, ha raccolti i frutti delle sue diligenti ed utili ricerche sulle matematiche e i matematici napoletani, già pubblicate in varie riviste, e più specialmente nelle " Memorie dell'Accademia Pontaniana "; e crediamo che abbia fatto ottima cosa perchè è bene che a questo genere di ricerche sia data pubblicità più larga di quella che può dare il citato periodico.

Questa prima parte si compone di quattro capitoli. Il 1° dal titolo " Stato delle matematiche a Napoli dal 1650 al 1730 " fu letto all'Accademia pontaniana il 17 novembre 1901 e 12 gennaio 1902, ed ebbe il premio *Tenore* del 1897. In esso si parla della fondazione della Reale Accademia delle scienze di Napoli (20 marzo 1698), di Giovanni Alfonso Borelli (1608-1679), amico di Galileo e continuatore della sua scuola, di Antonio de Monforte (1646-1717), di Giacinto de Cristofaro (n. nel 1650) ed altri matematici minori.

Il Capitolo 2° " Dai fratelli De Martino a Vito Caravelli " letto all'Accademia Pontaniana nelle tornate del 2 novembre e 7 dicembre 1902, contiene il periodo dal 1732 al 1778, epoca in cui la scoperta dell'antica Ercolano richiamò l'attenzione di molti illustri su Napoli e i Napoletani, e che segnò un principio di risveglio negli studi; infatti fu aumentato il numero delle cattedre di matematica che fino all'ora era stata unica, nel 1735 fu riordinata la Reale Accademia delle scienze, nel 1744 la Reale Accademia di Artiglieria, nel 1754 la Reale Accademia del corpo degl'Ingegneri, le ultime due delle quali furono fuse nel 1769 nella Reale Accademia militare, convertita poi nell'attuale Collegio militare.

Il 3° capitolo " Niccolò Fergola " fu letto all'Accademia Pontoniana nella tornata del 5 luglio 1900. Questo capitolo è una interessante e diligente ricostruzione della storia della vita e delle opere di Niccolò Fergola, che occupò il primo posto fra i matematici napoletani del secolo decimottavo, ricavata con sagace critica storica dagli scritti scientifici dello stesso Fergola, dagli autori del tempo, e dai verbali dell'Accademia delle Scienze.

Il Capitolo 4° " Gl'Istituti d'istruzione e scientifici in Napoli intorno al 1800 " presenta al lettore un quadro dettagliato e molto interessante delle condizioni delle scuole e della scienza in Napoli nella prima parte del passato secolo, ed in particolare sugli studi privati, istituzione specialissima di origine prettamente napoletana; e fa sfilare una larga schiera di matematici, alcuni dei quali di discreto valore.

Auguriamo che sia presto compiuta quest'opera, che ha indiscutibilmente una notevolissima importanza storica. K.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 31 dicembre 1905

GIORNALI CHE FANNO IL CAMBIO COL "PERIODICO DI MATEMATICA„

Italiani:

Atti della R. Accademia di Bologna.
Atti della R. Accademia di Napoli.
Atti del R. Istituto Veneto.
Atti dell' Accademia pontaniana (Napoli).
Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze matematiche (Torino).
Giornale di Battaglini (Napoli).
Il Monitore Tecnico (Milano).
Il Nuovo Cimento (Pisa).
La Rassegna tecnica (Messina).
La Rivista tecnica (Torino).
La Rivista tecnica italiana (Roma).
La Scuola Secondaria Italiana (Milano).
L'eco degli Ingegneri e Periti agrimensori (Pescia).
Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.
Rivista agricola industriale (Roma).
Rivista di Matematica (Torino).
Rivista Marittima (Roma).

Stranieri:

American Journal of Mathematics (Baltimore).
American mathematical Monthly (Kidder).
Annaes scientificos de la Academia polytéchnica do Porto (Coimbra).
Annals of matematics (Cambridge-Mass).
Bibliotheca mathematica (Leipzig).
Bulletin de la Société mathématique de France (Paris).
Bullettin de la Société phisico-mathématique de Kasan (Kasan).
Bullettin of the American mathematical Society (New-York).
Communications de la Société Mathématique de Kharkow (Kharkow).
Gaceta de matemàticas elementales. Vitoria (Spagna).
Intermédiaire des Mathématiciens (Paris).
Jahresberichte der Deutschen mathematiker Vereinigung (Berlin).
Journal de mathématiques élémentaires par H. Vuibert (Paris).
L'Education mathématique par I. Griess et H. Vuibert (Paris).
L'Enseignement mathém., revue internationale par Laisant et Fehr (Paris).
Mathematical Gazette (London).
Mathesis (Gand).
Memorias de la Sociedad çientifica Antonio Alzate (Mexico).
Niew Archief voor wiskunde (Amsterdam).
Nouvelles annales (Paris).
Proceedings of the London mathematical society.
Report of the National Museum (Washington).
Report of the Smithscnian Institution (Washington).
Revista trimestral de matemáticas (Zaragoza).
Revue semestrielle des publications mathématiques (Amsterdam).
The annals of mathematics (Cambridge-Massachusset).
The Proceedings and Transactions of the Nova Scotian Institute of Science (Halifax, Nova Scotia).
Transactions of the Texas Academy of Science (Austin).
Viadomosci matematycznych (Warszawa).
Vèstnik òpitnoi Fìsiki i elementarnoi Matemàtichi. Isdavaemii V. A. Ghernietom. Pod redaktsiei V. A. Zimmermana. Odessa (Russia).
Zeitschrift für math. und naturws. Unterricht (Leipzig).
Wiskundig Tijdschrift (Rotterdam).

CONDIZIONI DI ABBONAMENTO

AL

PERIODICO DI MATEMATICA

		Italia	Estero
Periodico di matematica	L.	8	9
Supplemento al Periodico di matematica . . .	„	2	2,50
Periodico e Supplemento	„	9,50	11

Non si fanno altro che abbonamenti annui decorrenti dal 1° luglio al 30 giugno dell'anno successivo.

Per accordi presi col Presidente dell'Associazione " Mathesis „ i signori soci di quest'Associazione potranno avere l'abbonamento al *Periodico di Matematica* al prezzo di L. **6** (in aggiunta alla quota sociale, pure di L. 6), **pagato anticipatamente** al Segretario dell'Associazione, prof. **Gaetano Riboni**, *Via Vittoria 53, Milano.*

ANNO XXI GENNAIO-FEBBRAIO 1906 FASC. IV

PERIODICO DI MATEMATICA

PER

L' INSEGNAMENTO SECONDARIO

fondato da DAVIDE BESSO, continuato da AURELIO LUGLI

ED ATTUALMENTE DIRETTO

DAL

PROF. GIULIO LAZZERI

SERIE III — VOLUME III

SOMMARIO:

LIVORNO
TIPOGRAFIA RAFFAELLO GIUSTI
1906

XI Congresso degli Ingegneri ed Architetti Italiani

(Milano 1906).

Si riunirà a Milano nel settembre del 1906 l'XI Congresso degli Ingegneri ed Architetti Italiani.

I Congressi degli Ingegneri si riuniscono regolarmente ogni tre anni; il primo Congresso ebbe luogo a Milano nel 1875 sotto la presidenza del compianto Senatore Brioschi. Successivamente altre riunioni ebbero luogo nelle principali città d'Italia, sedi di Collegi. La X ed ultima riunione si tenne a Cagliari nell'anno 1902: essa deliberò che il successivo Congresso dovesse riunirsi a Milano nel 1905. Essendo poi stata rimandata la data dell'Esposizione Internazionale di Milano dal 1905 al 1906, anche il Congresso degli Ingegneri ed Architetti fu rimandato, e definitivamente fissato pel settembre 1906.

A questa riunione, a cui la coincidenza di luogo e di data con la grande Esposizione, dà particolare importanza ed interesse, saranno trattate importanti questioni di interesse tecnico e generale.

Fu in questi giorni diramata la circolare di invito al Congresso per parte del Comitato Esecutivo all'uopo nominato; essa rileva appunto come fosse opportuno e logico, che in Milano, nello stesso anno in cui l'Italia è chiamata ad affermarsi in cospetto alle altre nazioni civili per i progressi tecnici ed industriali conseguiti, gli Ingegneri ed Architetti d'Italia fossero chiamati a Congresso per discutere delle importanti questioni che si affacciano col grande odierno movimento in cui essi hanno tanta viva parte.

Il Congresso di Milano, secondo il programma già distribuito, sarà diviso in cinque sezioni, dedicate ciascuna alle seguenti materie:

Sezione I. — *Archeologia — Architettura — Edilizia — Igiene.*
» II. — *Aereonautica — Idraulica — Bonifiche.*
» III. — *Strade ordinarie — Strade ferrate — Ponti.*
» IV. — *Meccanica — Tecnologie industriali — Costruzioni navali — Metallurgia — Miniere — Elettrotecnica.*
» V. — *Geodesia — Topografia — Catasto — Agraria — Economia rurale ed Estimo.*

A Sezioni riunite verranno poi trattati argomenti di Legislazione tecnica e questioni professionali.

I temi da proporsi alla discussione dovranno essere mandati al Comitato Esecutivo del Congresso entro il 31 marzo p. v., e le memorie illustrative degli stessi dovranno pervenire al Comitato entro il 31 luglio successivo.

Il congresso viene organizzato da uno speciale Comitato Esecutivo, nominato dal Collegio degli Ingegneri ed Architetti di Milano. L'Ufficio di Presidenza dello stesso è rimasto così formato:

Colombo Sen. Prof. Ing. Giuseppe, *Presidente.* — Celoria Ing. Comm. Giovanni — De Capitani Nob. Ing. Cav. Edgardo — Saldini Ing. Prof. Cesare, *Vice Presidenti.* — Sacerdoti Ing. Nino, *Segretario generale.* — Baroni Ing. Mario — Belluzzo Ing. Giuseppe — Gattinoni Ing. Ettore — Minorini Ing. Francesco — Semenza Ing. Guido, *Segretari.* — Chiodi Ing. Giuseppe, *Cassiere.*

Secondo prescrive il regolamento, per ottenere l'iscrizione al Congresso si dovrà inviare l'adesione insieme alla quota d'iscrizione fissata in L. 20 (venti) al Comitato Esecutivo a Milano, Via S. Paolo N. 10.

Il Comitato Esecutivo, il quale lavora già attivamente per preparare questo Congresso, cercherà di rendere più interessante la riunione, procurando che i colleghi abbiano modo di visitare in occasione della loro venuta a Milano quanto vi può essere di nuovo e di importante dal lato tecnico ed artistico nella Lombardia.

SEZIONI CONICHE

La teoria delle sezioni coniche, trattata indipendentemente dalla geometria analitica e dalla geometria proiettiva, presenta in tutti i trattati che sono a mia conoscenza delle lacune di una certa importanza.

La più importante è quella relativa allo studio dei diametri, studio che in alcuni trattati viene omesso del tutto, in altri viene fatto soltanto per l'ellisse, considerata come proiezione del cerchio. Eppure tale studio può farsi elementarmente con una semplicità ed una eleganza, che non hanno nulla da invidiare ai metodi della geometria analitica e della geometria proiettiva, purchè si faccia opportunamente uso delle considerazioni planimetriche e stereometriche alternativamente.

Credo dunque fare cosa non del tutto inutile pubblicando questo articolo, nel quale è esposta una trattazione delle coniche, quale a mio parere dovrebbe essere svolta nel 2° biennio degl' Istituti tecnici. Per la natura stessa dell'argomento, questo articolo non può contenere proprietà nuove; anche varie dimostrazioni sono vecchie e note; ma nell'insieme spero che il lettore troverà qualche cosa di nuovo.

Proprietà generali.

1. Definizione. — *Si chiama* **sezione conica** *o più brevemente* **conica** *ogni linea ottenuta come intersezione di un piano con una superficie conica rotonda.*

Esaminiamo tutti i casi che si possono presentare, ed a tale scopo cominciamo col ricordare che si chiama *angolo di una superficie conica rotonda* l'angolo acuto formato dall'asse con una delle generatrici; indicheremo questo angolo colla lettera θ. Inoltre per le

sezioni prodotte in una superficie conica da un piano che passa per l'asse è noto il seguente

TEOREMA. — *Un piano passante pel vertice di una superficie conica rotonda, il cui angolo è* θ;

1° *ha tutti gli altri suoi punti esterni alla superficie se forma coll'asse un angolo maggiore di* θ (fig. 1);

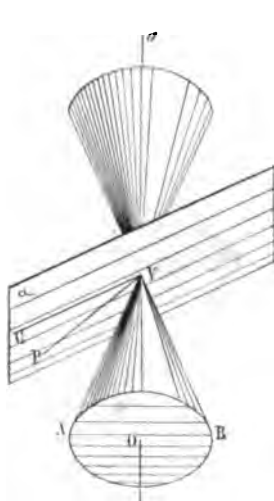
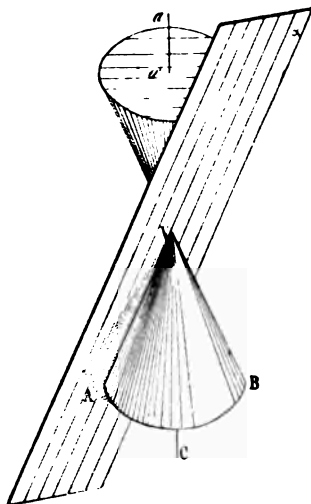
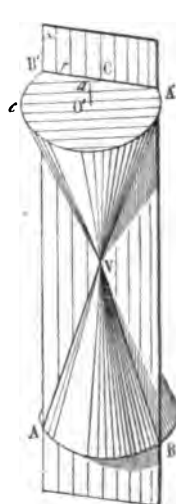



Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

2° *ha in comune con essa tutti e soli i punti di una generatrice, se forma coll'asse un angolo eguale a* θ (fig. 2);

3° *ha in comune con essa tutti e soli i punti di due generatrici, se forma coll'asse un angolo minore di* θ (fig. 3).

Nel 2° caso il piano si chiama tangente.

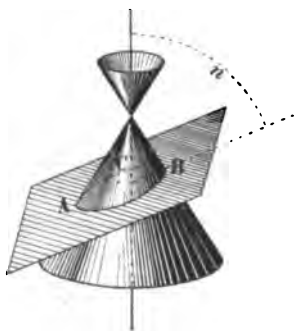
2. Ciò premesso consideriamo un piano α che non passi per il vertice V del cono, ed insieme con esso il piano α_v parallelo ad α condotto per V.

1°. Se α e quindi anche α_v forma coll'asse un angolo φ maggiore di θ, le due falde della superficie si trovano da parti opposte di α_v, e per conseguenza α incontra tutte le generatrici di una falda, ossia la conica che essa determina è tutta sopra una falda della superficie ed i suoi punti sono tutti a distanza finita dal vertice (fig. 4).

Fig. 4.

2°. Se α, e quindi anche α_v forma con l'asse un angolo uguale a θ, α_v ha in comune colla superficie conica

una ed una sola generatrice, e le due falde di tale superficie si trovano da parti opposte di α_v. Per conseguenza α dovrà incontrare tutte le generatrici di una falda eccetto quella che è contenuta in α_v e quindi è parallela ad α (fig. 5).

In altre parole la conica determinata da α è tutta situata sopra una falda della superficie conica, ed i suoi punti hanno dal vertice distanze che possono essere maggiori di qualunque segmento.

3°. Se α, e quindi anche α_v, forma coll'asse un angolo minore di θ, il piano α_v ha in comune colla superficie conica due rette e divide in due parti ciascuna delle sue falde. Per conseguenza α

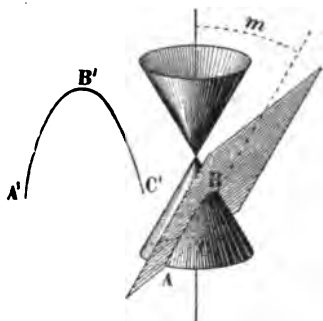
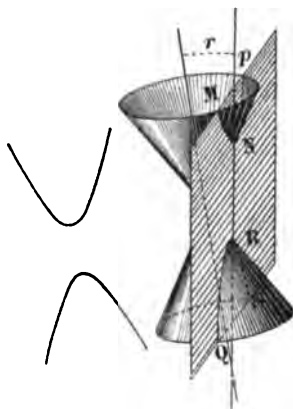



Fig. 5. Fig. 6.

incontra tutte quelle generatrici delle due falde che si trovano da una parte di α_v, escluse le due contenute in α_v e parallele ad α (fig. 6). In altre parole la conica determinata da α si compone di due rami distinti situati rispettivamente sulle due falde della superficie; e le distanze dei punti di ciascun ramo dal vertice possono diventare maggiori di qualsiasi segmento.

Da questo esame sommario apparisce che le sezioni prodotte in una superficie conica da un piano che non passa pel vertice si possono distinguere in tre classi, che designeremo nel modo seguente:

Definizioni. — 1ª. *Una sezione conica prodotta da un piano α che non passa pel vertice si chiama* **ellisse**, **parabola** *o* **iperbole**, *secondo che α fa coll'asse un angolo maggiore, eguale o minore di θ.*

2ª. *Un punto del piano α si dice* **interno** *o* **esterno** *ad una conica, secondo che è interno ad una delle falde della superficie o esterno a tutte e due.*

Corollario. — *Il circolo è un caso particolare dell'ellisse.*

Infatti si ottiene un circolo tagliando una superficie conica con un piano perpendicolare all'asse, ossia con un piano che fa coll'asse un angolo $\varphi = 90^0 \, (> \theta)$.

3. Da quanto è stato detto fin qui risulta che tuttte le sezioni coniche possibili possono raggrupparsi nel seguente quadro, seguitando a chiamare φ l'angolo del cono e θ l'angolo dell'asse col piano secante.

piano α passante per il vertice	$\varphi > \theta$	un punto
	$\varphi = \theta$	una retta
	$\varphi < \theta$	due rette
piano α non passante per il vertice	$\varphi > \theta$	ellisse; circolo, se $\varphi = 90^0$
	$\varphi = \theta$	parabola
	$\varphi < \theta$	iperbole

DEFINIZIONE. — *Si chiamano* **assintoti di un' iperbole** *le due rette intersezioni del piano α della medesima coi piani tangenti alla superficie conica lungo le generatrici comuni alla superficie medesima ed al piano α_v, condotto pel vertice della superficie, parallelo ad α.*

4. TEOREMA. — *Ogni sezione conica ha per asse di simmetria, la proiezione dell'asse della superficie conica sul piano della sezione.*

Condotto per il vertice V il piano β perpendicolare al piano α della conica, tanto la superficie conica quanto il piano α risultano simmetrici rispetto a β, e perciò anche la loro intersezione è simmetrica rispetto al piano β ovvero alla retta comune ai piani α, β.

È facile vedere che questa retta incontra in due punti la superficie conica, oppure in uno solo, se è parallela ad una generatrice, il che avviene soltanto se è $\varphi = \theta$.

DEFINIZIONI. — 1ª. *La proiezione dell'asse di una superficie conica sul piano di una sezione si chiama* **asse principale della sezione conica.**

2ª. *I punti d' incontro di una conica col suo asse principale si chiamano* **vertici principali.**

COROLLARI. — 1°. *Un'ellisse o un' iperbole ha due vertici principali, una parabola ne ha un solo.*

2°. *I due assintoti di un' iperbole s' incontrano in un punto dell'asse principale della medesima.*

Infatti le due generatrici comuni alla superficie conica e al piano α_v sono simmetriche rispetto al piano β, perciò i piani tangenti alla superficie conica luogo di esse sono pure simmetrici ri-

spetto a β e si tagliano secondo una retta situata in β, perciò gli assintoti, intersezioni di questi piani con α si tagliano in un punto della retta $\beta\alpha$ cioè dell'asse principale.

DEFINIZIONE. — 3ª. *Si chiama* **lunghezza dell'asse principale di un'ellisse o di un'iperbole,** *la distanza dei due vertici principali.*

5. DEFINIZIONI. — 1ª. *Una retta si dice* **tangente** *ad una conica se è situata nel suo piano ed in un piano tangente alla superficie conica. Il punto comune ad una conica e ad una tangente si chiama* **punto di contatto** *di questa.*

2ª. *La retta situata nel piano di una conica e perpendicolare ad una sua tangente nel punto di contatto si chiama* **normale alla conica.**

COROLLARIO. — *Dato un punto* A *di una conica, si può condurre in esso una ed una sola tangente.*

Questa è la retta d'intersezione del piano della conica col piano tangente in A alla superficie conica.

È opportuno osservare che, se si considera la retta che passa per due punti A, B di una conica, e si suppone che il punto B si muova sulla curva in modo che la distanza AB decresca indefinitamente. la posizione limite della retta AB è la tangente in A alla conica.

6. TEOREMA. — *Una retta situata nel piano di una conica ha al più due punti comuni con essa.*

Sia p una retta situata nel piano π di una conica γ. È evidente che, se P è un punto comune a p e a γ, la retta che congiunge P col vertice della superficie conica appartiene a questa superficie e al piano Vp. Inversamente se r è una generatrice della superficie conica situata nel piano Vp essa incontrerà p (purchè p non sia parallela ad r) in un punto P comune a p e alla conica γ.

Siccome un piano condotto pel vertice V della superficie conica non può avere più di due generatrici comuni con essa (§ 1, teor.), ne risulta che una retta p non può avere più di due punti comuni con la conica.

7. Prendendo più minutamente in esame le varie posizioni di una retta rispetto ad una conica, al teorema precedente possiamo aggiungere le considerazioni seguenti:

1ª. Se la conica γ è una ellisse, la retta p non è parallela ad alcuna generatrice della superficie conica, ed allora essa ha due, uno o nessun punto comune con la conica γ, secondo che il piano Vp ha due, una o nessuna generatrice comune con la superficie.

2ª. Se la conica γ è una parabola od una iperbole, ma p non è parallela ad alcuna generatrice della superficie conica, si possono ripetere le stesse considerazioni del caso precedente.

3ª. Se la conica γ è una parabola, e p è parallela all'asse, è anche parallela alla generatrice r parallela al piano della parabola; allora è chiaro che il piano Vp taglia la superficie secondo la r e secondo un'altra generatrice r' che incontra p, ossia la p ha uno ed un solo punto comune colla parabola.

4ª. Se la conica γ è una iperbole, e p è parallela ad uno dei due assintoti della medesima, e quindi anche ad una delle due generatrici della superficie conica situate nel piano per V parallelo al piano π della sezione conica, il piano Vp, o taglia la superficie conica secondo la generatrice r e secondo un'altra generatrice s, la quale incontrerà s in un punto, oppure coincide col piano tangente lungo la r. Nel primo caso la p ha un sol punto comune con la conica, nel secondo caso p coincide con l'assintoto e non ha nessun punto comune a distanza finita colla conica.

Da queste considerazioni discendono i seguenti

Corollari. — 1°. *Ogni retta parallela all'asse di una parabola incontra la parabola in uno ed in un solo punto.*

2°. *Ogni retta parallela ad un assintoto di un'iperbole, incontra l'iperbole in uno ed in un sol punto.*

3°. *Ogni retta che ha un sol punto comune con un'ellisse ed è situata nel suo piano è tangente ad essa.*

4°. *Ogni retta che è situata nel piano di una parabola, ed ha un sol punto comune con essa e non è parallela all'asse, è tangente alla parabola.*

5°. *Ogni retta che è situata nel piano di una iperbole e che non è parallela ad un assintoto ed ha un sol punto comune con essa, è tangente all'iperbole.*

Fuochi - Eccentricità.

8. Teorema. — *Esistono due superficie sferiche inscritte in una superficie conica e tangenti ad un piano α che non passa per il vertice, se φ non è uguale a θ; ne esiste una, se è $\varphi = \theta$.*

Si conduca per l'asse il piano β perpendicolare ad α e sieno r, r' le generatrici in esso contenute, ed a la retta $\alpha\beta$ (fig. 7).

Se a non è parallelo ad r nè ad r' forma con esse un triangolo, ed esistono quattro circoli tangenti ad r, r', a. Di questi due sono interni all'uno o all'altro degli angoli delle r, r' che contengono

l'asse del cono. Più particolarmente, se la sezione conica è una ellisse, i due circoli suddetti sono quello inscritto e uno degli exinscritti e sono interni allo stesso angolo; se la sezione è un' iperbole i due circoli sono due degli exinscritti e sono interni rispettivamente ai due angoli delle r, r', che contengono l'asse.

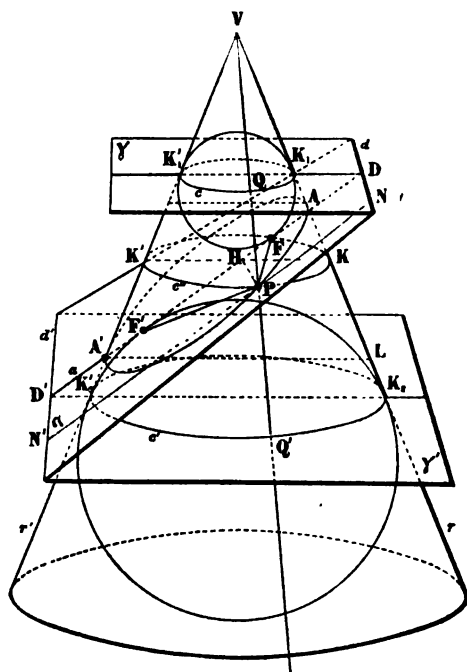



Fig. 7.

In ambedue i casi le sfere, che hanno per sezioni diametrali quei due circoli, sono inscritte alla superficie conica e tangenti al piano α.

Se la sezione è una parabola, la retta a risulta parallela ad una delle rette r, r', per esempio alla r', ed allora esistono due soli circoli tangenti alle rette r, r', a, dei quali uno solo è interno a uno degli angoli delle r, r' che comprendono l'asse.

La sfera, che ha per sezione diametrale questo circolo, è inscritto nella superficie conica e tangente al piano della sezione conica.

Definizioni. — 1ª. *Chiamasi* **fuoco di una conica** *il punto di contatto del suo piano α con una superficie sferica tangente ad esso e inscritta nella superficie conica.*

2ª. *La retta comune al piano α della sezione e al piano che passa per il circolo comune alla superficie conica e alla superficie sferica inscritta e tangente ad α in un fuoco, si chiama* **direttrice corrispondente a quel fuoco.**

Corollari. — 1°. *I fuochi di una conica sono situati sull' asse principale, le direttrici sono perpendicolari all'asse stesso.*

2°. *Un'ellisse ha due fuochi interni al segmento che ha per estremi i vertici; un'iperbole ne ha pure due esterni al segmento stesso; una parabola ha un solo fuoco. Nel circolo i due fuochi vengono a coincidere nel centro, poichè le due sfere che li determinano toccano il piano del circolo nello stesso punto.*

9. Teorema 1°. — *Per i punti di un' ellisse è costante la somma delle distanze dai fuochi; per i punti di un' iperbole è costante la differenza delle distanze dai fuochi.*

Sia P un punto di un'ellisse (o di un'iperbole), Q, Q' i punti d'incontro della generatrice VP coi circoli c, c' di contatto della superficie conica colle superficie sferiche che determinano i fuochi F, F'.

Poichè i segmenti tangenti condotti da un punto ad una sfera sono eguali, si ha

$$PF = PQ\,, \qquad PF' = PQ'.$$

Se la sezione è un'ellisse (P essendo interno al segmento QQ') si ha $PQ + PQ' = QQ'$, e quindi anche

$$PF + PF' = QQ'.$$

Se la sezione è un'iperbole (P essendo esterno al segmento QQ'), QQ' è uguale alla differenza di PQ e PQ', perciò si ha anche

$$PF - PF' = QQ',$$

oppure

$$PF' - PF = QQ',$$

secondo che il punto P è sull'uno o sull'altro ramo della curva.

Ma il segmento QQ' di generatrice, compreso fra due sezioni normali della superficie conica è costante, e l'indicheremo sempre con $2a$, perciò avremo

per i punti		dell'ellisse	$PF + PF' = 2a$
»	»	di un ramo d'iperbole	$PF - PF' = 2a$
»	»	dell'altro ramo	$PF' - PF = 2a.$

Corollari. — 1°. *I due fuochi di un'ellisse o di un'iperbole sono situati a distanze eguali dai due vertici rispettivamente.*

Infatti se A, A' sono i vertici di un'ellisse si deve avere

$$AF + AF' = A'F + A'F',$$

ma si anche

$$AF' = AF + FF', \qquad A'F = A'F' + F'F,$$

perciò si dovrà avere

$$2AF + FF' = 2A'F' + FF',$$

e quindi

$$AF = A'F'.$$

2°. *La costante* 2a *del teorema precedente è* **la lunghezza dell'asse principale.**

Infatti si deve avere nell'ellisse

$$AF + AF' = 2a,$$

ovvero

$$AF + FA' = 2a,$$

ovvero

$$AA' = 2a.$$

Una dimostrazione simile può farsi per l'iperbole

Definizione. — *Si chiama* **distanza focale** *di un'ellisse o di una iperbole il segmento che ha per estremi i due fuochi. Indicheremo la sua lunghezza con* 2c.

10. Teorema 1°. — *La somma delle distanze di un punto situato nel piano di un'ellisse dai due fuochi di questa è minore o maggiore di* 2a *secondo che esso è interno o esterno all'ellisse.*

Se I è un punto interno ad un'ellisse (fig. 8), la semiretta F'I incontra l'ellisse in un punto M esterno al segmento F'I, e si ha

$$IF < IM + MF$$

e quindi (essendo $F'I + IM = F'M$)

$$F'I + IF < F'M + MF,$$

ovvero

$$F'I + IF < 2a.$$

Fig. 8.

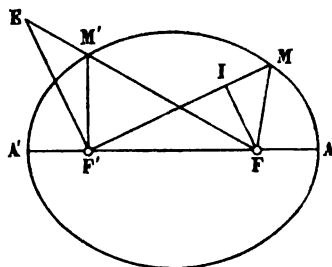
Se invece E è un punto esterno all'ellisse, il segmento FE incontra l'ellisse in un punto M', e si ha

$$F'E + EM' > F'M',$$

e quindi (essendo $EM' + M'F = EF$)

$$F'E + EF > F'M' + M'F,$$

ovvero

$$F'E' + E'F > 2a.$$

Teorema 2°. — *La differenza delle distanze di un punto, situato nel piano di un'iperbole, dai fuochi di questa è minore o maggiore di* 2a, *secondo che esso è esterno o interno all'iperbole.*

Se I è un punto interno ad uno dei rami di un'iperbole ed F' il fuoco interno all'altro ramo, è facile vedere che il segmento F'I incontra i due rami d'iperbole ciascuno in un punto; essendo M il punto d'incontro col ramo rispetto al quale I è interno, si ha

Fig. 9.

$$IF' = IM + MF' = IM + MF + 2a,$$

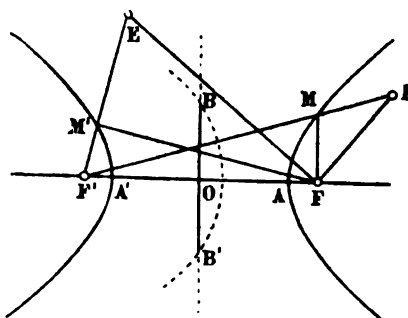
essendo

$$MF' = MF + 2a;$$

e siccome

$$IM + MF > IF,$$

risulta

$$IF' - IF > 2a.$$

Se invece E è esterno all'iperbole, il segmento EF' taglia il ramo rispetto al quale F' è interno, in un punto M', e si ha

$$EF < EM' + M'F = EM' + M'F' + M'F - M'F'$$

ossia, essendo $M'F - M'F' = 2a$,

$$EF < EF' + 2a,$$

e quindi $2a$ è maggiore della differenza fra EF' ed EF.

Corollari. — 1°. *L'ellisse è il luogo geometrico dei punti di un piano per i quali è costante la somma delle distanze dai due punti fissi* (**fuochi**).

2°. *L'iperbole è il luogo geometrico dei punti di un piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi* (**fuochi**).

II. Teorema. — *Per tutti i punti di una conica è costante il rapporto delle distanze da un fuoco e dalla direttrice corrispondente.*

Preso un punto qualunque P di una sezione conica (fig. 7), si conduca per esso un piano γ'' perpendicolare all'asse, che taglierà la superficie conica secondo un circolo c''; e sia H la proiezione di P sull'asse della conica. Il piano β condotto per l'asse della superficie conica, perpendicolare al piano della sezione conica data, taglia il piano γ'' e i piani γ, γ' (che passano per i circoli di contatto delle sfere che determinano i fuochi) secondo tre rette parallele, che sono tagliate dall'asse della sezione nei punti H, D, D', dalla generatrice VA nei punti K, K_1, K_2 dalla generatrice VA' nei punti K', K'_1, K'_2.

Per il teorema di Talete si ha dunque

$$\frac{KK_1}{HD} = \frac{KK_2}{HD'} = \frac{AK_1}{AD} = \frac{AK_2}{AD'}.$$

Ma si ha pure (indicando con N, N′ le proiezioni di P sulle direttrici d, d')

$$KK_1 = PQ = PF$$

$$KK_2 = PQ' = PF',$$

$$HD = PN\,, \qquad HD' = PN'$$

$$AK_1 = AF\,, \qquad AK_2 = AF'.$$

Perciò si ha pure

$$\frac{PF}{PN} = \frac{PF'}{PN'} = \frac{AF}{AD} = \frac{AF'}{AD'}.$$

In simil guisa si trova

$$\frac{PF}{PN} = \frac{PF'}{PN'} = \frac{A'F}{A'D} = \frac{A'F'}{A'D'}.$$

Da queste proporzioni discende la verità dell'enunciato teorema, e risulta anche che il rapporto costante delle distanze di un punto della conica da un fuoco e dalla corrispondente direttrice, è il medesimo per ambedue i fuochi.

Se la curva data è una parabola, esiste uno solo dei piani γ, γ' per es. γ, ma nel resto il ragionamento non varia.

Essendo però l'asse della parabola parallelo alla generatrice r', il triangolo ADK_1, risulta isoscele e si ha

$$\frac{PF}{PN} = 1, \qquad \text{ossia} \qquad PF = PN.$$

Definizione. — *Il rapporto costante delle distanze di un punto di una conica da un fuoco e dalla corrispondente direttrice, si chiama* **eccentricità** *e s' indica abitualmente colla lettera* e.

Corollari. — 1°. *L' eccentricità di un' ellisse o di un' iperbole è eguale al rapporto fra la distanza focale e la lunghezza dell'asse.*

Si ha infatti, essendo A, A′ punti della conica

$$e = \frac{AF}{AD} = \frac{AF'}{AD'} = \frac{A'F}{A'D} = \frac{A'F'}{A'D'};$$

essendo $AF = A'F'$, $A'F = AF'$, risulta intanto

$$AD = A'D'\,, \qquad AD' = A'D\,,$$

perciò si ha anche

$$e = \frac{AF - AF'}{AD - A'D} = \frac{FF'}{AA'} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}\,.$$

2°. *L' eccentricità dell' ellisse è* < 1, *quella dell' iperbole è* > 1, *quella della parabola è* 1, *quella del circolo è* 0.

Infatti nell'ellisse è $2c < 2a$, nell'iperbole $2c > a$, nel circolo $2c = 0$.

3°. *Se per uno dei vertici* A' *di un'ellisse o di un'iperbole* (fig. 7) *si conduce nel piano che passa per esso e per l'asse della superficie conica una perpendicolare all'asse, e si chiama* L *il punto d' incontro di questa perpendicolare colla superficie conica, il segmento* AL *è uguale alla distanza focale.*

Infatti si ha

$$\frac{AL}{AA'} = \frac{AK_1}{AD} = \frac{AF}{AD} = e.$$

Ma si ha anche

$$\frac{FF'}{AA'} = e;$$

dunque

$$AL = FF'.$$

4°. *Se* A *è il vertice di una parabola,* AO *la perpendicolare da esso condotta all'asse del cono,* OL *la perpendicolare condotta da* O *alla generatrice* VA, *il punto* O *è il centro della sfera inscritta alla superficie conica e tangente al piano della parabola,* AL *è eguale alla distanza del vertice della parabola dal fuoco.*

12. Teorema. — *Un punto del piano di una parabola ha dal fuoco una distanza minore o maggiore di quella che ha dalla direttrice, secondo che esso è interno o esterno alla parabola.*

Se I (fig. 10) è un punto interno ad una parabola, e II' è la perpendicolare da esso condotta alla direttrice, essa incontrerà la parabola in un punto M interno al segmento II', e si avrà

$$IF < IM + MF$$

ovvero, essendo $MF = MI'$

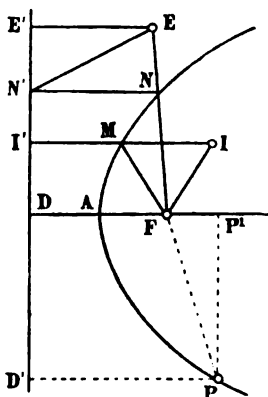
$$IF < II'.$$

Fig. 10.

Similmente, essendo E un punto esterno alla parabola EE' la perpendicolare da E alla direttrice N il punto d' incontro del segmento EF colla parabola, NN' la perpendicolare condotta da N alla direttrice, si ha

$$EE' < EN' < EN + NN',$$

e, siccome $NN' = NF$

$$EE' < EN + NF \qquad \text{ossia} \qquad EE' < EF.$$

Corollario. — *La parabola è il luogo dei punti di un piano equidistanti dal suo punto fisso* (**fuoco**) *e da una retta fissa* (**direttrice**).

13. I corollari 1° e 2° del § 10 e il corollario del § 11 enunciano proprietà delle coniche che sono sufficienti a definire l'ellisse, l'iperbole e la parabola nel piano indipendentemente dalla superficie conica dalla quale sono state ricavate come sezioni. Per potere prendere queste proprietà come definizioni delle coniche è necessario però dimostrare il teorema inverso, che è il seguente.

Teorema. — *Ogni curva definita come luogo dei punti di un piano per i quali è costante la somma o la differenza delle distanze da due punti fissi, oppure come luogo dei punti di un piano equidistanti da un punto e da una retta è una sezione conica.*

1°. Sia data una curva definita come luogo dei punti di un piano, tali che la somma delle loro distanze da due punti fissi F, F′ sia eguale a $2a$.

Prendiamo una superficie conica rotonda arbitraria e siano r, r' (fig. 11) due generatrici situate in un piano π che passa per l'asse s della superficie. Preso su r un segmento $\mathrm{VE} = 2c = \mathrm{FF}'$, e condotta per E una perpendicolare ad s, si descriva col vertice in V, con raggio $2a$ un circolo. Questo, essendo E interno ad esso, perchè $2c < 2a$, taglierà la perpendicolare suddetta in due punti, uno dei quali, E′, è sulla semiretta uscente da E che incontra s. Si conduca da E′ la E′A′ parallela ad r, quindi per A′ (incontro con r') si conducano A′A parallela a VE′ e A′L parallela ad FE. Avremo

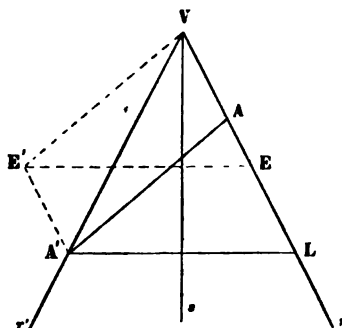
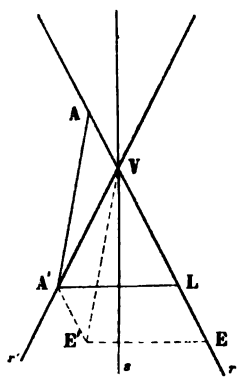



Fig. 11.

$$\mathrm{AL} = 2c \qquad \mathrm{AA}' = 2a\,.$$

Se per la retta AA′ si conduce un piano perpendicolare a π, esso taglierà la superficie conica secondo un'ellisse che ha A, A′ per vertici e AL per distanza focale, ossia è eguale alla curva data (v. § 11, cor. 3°), perchè, essendo VE′>VE, la VE fa coll'asse della superficie perpendicolare ad EE′ un angolo maggiore di quello che fa VE.

2°. Sia data una curva definita come luogo dei punti di un piano, tali che sia costante la differenza delle distanze da due punti.

Si ripeta la stessa costruzione precedente e gli stessi ragionamenti. Si osservi però che affinchè la retta EE′ (fig. 12) incontri il circolo di centro V e raggio $2a$ (che in questo caso è minore di $2c$) è necessario che $2c$ non sia minore della distanza di V da EE′.

3°. Sia data una curva definita come luogo dei punti equidistanti da un punto F e da una retta d.

Presa una superficie conica arbitraria, siano r, r' le due generatrici contenute in un piano che passa per l'asse s. Si costruisca un triangolo EGE′ che abbia un lato EG eguale a metà della distanza di F da d, ed i lati E′G, E′E rispettivamente perpendicolari ad r ed s. Condotta per E′ la parallela ad r che incontri in O la s, e poi per O le OL, OA, perpendicolari ad r, s rispettivamente, si ottiene un triangolo OLA che verifica le stesse condizioni ed ha un vertice O sulla s. Se da A si conduce una retta p parallela ad r' e per p un piano perpendicolare a quello della figura, questo taglia la superficie conica secondo una parabola che ha la retta p per asse e tale che la distanza dal vertice A al fuoco sia eguale ad AL (§ 11, cor. 4°). Perciò questa parabola è identica alla curva data.

Fig. 12.

14. Teorema. — *Il luogo dei vertici dei coni rotondi che proiettano una data conica G è un'altra conica G′ situata nel piano perpendicolare a quello della G condotta per l'asse della medesima. E più particolarmente:*

1° *se G è un'ellisse (o un'iperbole) G′ è l'iperbole (o l'ellisse) che ha per fuochi i vertici di G e per vertici i fuochi di G;*

2° *se G è una parabola, G′ è la parabola che ha per fuoco il vertice di G e per vertice il fuoco di G.*

1°. Dalle costruzioni fatte nel § precedente apparisce che affinchè V sia vertice di un cono rotondo che proietta un'ellisse (o un'iperbole) G avente A, A′ per vertici (figg. 11 e 12), è necessario e sufficiente che sia situato nel piano perpendicolare a quello della G condotto per AA′, e che si abbia $|VA' - VA| = AL = 2c$ (oppure $VA + VA' = AL = 2c$). Dunque il luogo dei vertici V è un'iperbole (o un'ellisse) che ha A, A′ per fuochi ed ha l'asse principale eguale a $2c$, cioè passa per i fuochi della curva data.

2°. Affinchè V sia vertice di un cono rotondo che proietta una data parabola G di fuoco F e vertice A, è necessario e sufficiente che sia situato nel piano perpendicolare a quello di G condotto per la AF e che si abbia VA = VB (essendo B il simmetrico di A rispetto all'asse del cono), cioè che V sia equidistante da A e dalla retta d perpendicolare a p condotta per il punto simmetrico di A rispetto ad F. Dunque il luogo dei vertici V è una parabola che ha A per fuoco e F per vertice.

Definizione. — *La conica, luogo dei vertici dei coni rotondi che proiettano una data conica, si chiama la* **conica focale di questa**.

Corollari. — 1°. *La conica focale di un'ellisse è un'iperbole, di un'iperbole è un'ellisse, di una parabola è una parabola eguale.*

2°. *La conica focale della conica focale di una data conica, è la conica stessa.*

3°. *Un'ellisse si può riguardare come sezione di due cilindri circolari che hanno le generatrici parallele ad uno degli assintoti dell'iperbole focale.*

Assi, centro.

15. Teorema. — *Un'ellisse o un'iperbole ha un secondo asse di simmetria perpendicolare al suo asse principale, e che divide per metà la sua lunghezza.*

Infatti per il punto di mezzo O del segmento AA′ o FF′ di un'ellisse si conduca la perpendicolare all'asse principale, e sia P un punto qualunque dell'ellisse. Si avrà

$$\mathrm{PF} + \mathrm{PF'} = 2a.$$

Se P′ è il simmetrico di P rispetto alla perpendicolare suddetta, si ha, essendo anche F, F′ simmetrici rispetto alla stessa retta, PF = P′F′, PF′ = P′F, e perciò

$$\mathrm{P'F'} + \mathrm{P'F} = 2a,$$

cioè anche P′ appartiene all'ellisse.

Dimostrazione simile può ripetersi per l'iperbole.

Definizione. — 1ª. *L'asse di simmetria perpendicolare all'asse principale di un'ellisse o di un'iperbole si chiama* **asse secondario.**

Corollario. — 1°. *Un'ellisse o un'iperbole è simmetrica rispetto al punto d'incontro dei due suoi assi, ossia questo punto è il* **centro** *della curva.*

DEFINIZIONE. — 2ª. *Le ellissi e l'iperboli si chiamano anche* **coniche centrali** *(cioè dotate di centro) e le parabole* **coniche non centrali.**

COROLLARIO. — 2°. *L'asse secondario di un'ellisse incontra la curva in due punti* B, B′, *che hanno dal centro* O *una distanza* $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Infatti, affinchè un punto sia contemporaneamente sull'ellisse e sull'asse secondario, è necessario e sufficiente che sia

$$PF + PF' = 2a$$
$$PF = PF' \qquad \text{ossia} \qquad PF = a.$$

Si verificano dunque queste condizioni costruendo un triangolo rettangolo, che ha a per ipotenusa e c per uno dei cateti.

3°. *Un'iperbole non ha alcun punto comune col suo asse secondario.*

Diametri delle coniche.

Piani diametrali e diametri delle superficie coniche.

16. TEOREMA. — *Il luogo dei punti di mezzo delle corde parallele di una superficie conica è un piano che passa pel vertice.*

Essendo date quantesivogliano corde parallele fra loro (e per conseguenza non parallele ad alcuna generatrice) sia AA′ (fig. 7) una di queste corde che incontri l'asse, e per essa si conduca il piano α perpendicolare al piano AA′V. Questo taglierà la superficie conica secondo una conica centrale, la quale ha un'asse di simmetria secondario p. Tutte le corde della superficie parallele ad AA′ e situate nel piano α sono dunque tagliate per metà dalla retta p, ovvero dal piano Vp.

Presa allora un'altra corda qualunque CC′ parallela ad AA′, il piano VCC′ determina su α un'altra corda $C_1C'_1$ divisa per metà dalla retta p, dunque anche CC′ è divisa per metà del piano Vp.

COROLLARIO. — *Il luogo dei punti di mezzo delle corde di una conica parallele ad una data direzione è una retta.*

Questo luogo è infatti la retta comune al piano della conica e al piano che divide per metà tutte le corde della superficie conica parallele a quella direzione.

DEFINIZIONI. — 1ª. *Chiamasi* **piano diametrale** *di una superficie conica rotonda, coniugata ad una data direzione, il piano che divide per metà tutte le corde parallele a quella direzione.*

2ª. *Chiamasi* **diametro** *di una conica coniugato ad una data direzione la retta luogo dei punti di mezzo delle corde parallele a questa direzione.*

17. TEOREMA. — *Se un diametro di una conica incontra la conica stessa in uno o due punti, le parallele alle corde coniugate a questo diametro per quel punto, o per quei punti, sono tangenti alla conica.*

Sia M uno di tali punti; la parallela p alle corde coniugate a quel diametro dovrebbe incontrare la conica in due punti H, K, equidistanti da M, e siccome una curva non può avere più di due punti comuni con una conica, i tre punti H, K, M devono coincidere, cioè la p deve essere tangente alla conica.

COROLLARIO. — *Se un piano diametrale di una superficie conica ha in comune con essa una o due generatrici, i piani che passano per una di queste e sono paralleli alla direzione a cui quel piano diametrale è coniugato, sono tangenti alla superficie.*

18. TEOREMA. — *Tutti i piani diametrali di una superficie conica coniugati alle rette di un piano passano per una retta.*

1°. Se un piano π taglia una superficie conica secondo una ellisse od una iperbole, questa ha un centro C, che divide per metà tutte le corde della conica che passano per esso; perciò tutti i piani diametrali della superficie, coniugati alle rette di π, passano per la retta VC.

2°. Se un piano π taglia una superficie conica secondo una parabola, esso è parallelo ad una direttrice r. Allora il piano diametrale coniugato ad una retta di π deve passare per r (§ 17, Cor.).

COROLLARI. — 1°. *Tutti i diametri di una conica centrale passano per il centro.*

2°. *Tutti i diametri di una parabola sono paralleli al suo asse.*

19. TEOREMA. — *Tutte le sezioni prodotte in una superficie conica da piani paralleli sono curve simili. Il luogo dei loro centri (se le sezioni sono coniche centrali) è una retta che passa pel vertice.*

Questo teorema apparisce evidente se si pensa che due sezioni parallelle di una superficie conica sono linee omotetiche rispetto al vertice preso come centro.

DEFINIZIONE. — *Il luogo dei centri delle sezioni coniche ottenute tagliando la superficie conica rotonda con piani paralleli fra loro (e non paralleli ad alcuna generatrice) si chiama* **diametro della superficie coniugato a quei piani.**

COROLLARIO. — *Se un piano diametrale π di una superficie conica taglia questa secondo due generatrici, i piani tangenti alla superficie medesima si tagliano secondo il diametro* d *coniugato a π; e viceversa se da una retta* d *condotta pel vertice della superficie co-*

nica si possono condurre a questa due piani tangenti, il piano che passa per le due generatrici di contatto è il piano diametrale coniugato alla direzione d.

Questa proprietà è conseguenza immediata del coroll. del § 17.

20. Teorema. — *Se* π *è il piano diametrale coniugato ad una retta* d, *il diametro coniugato al piano* π *è parallelo a* d; *e viceversa.*

Sia π il piano diametrale coniugato ad una data direzione, e π_1 un piano parallelo a π. Per un punto M′ della sezione conica prodotta da π_1 si tracci la corda M′M parallela a *d*, il piano π la taglierà nel punto di mezzo L del segmento MM′. Allora se si conduce per V la d_1 parallela a *d*, questa incontrerà la corda M′M″ situata nei piani π_1 e MM′V nel suo punto di mezzo N, perchè essendo MM′ divisa per metà in L, anche V sarà il punto di mezzo di MM″ ed N il punto di mezzo di MM′.

Ciò prova che tutte le corde della sezione prodotta da π_1 sono divise per metà dal punto N, incontro del piano π_1 colla retta per V parallela alla direzione *d*. Ne segue che N è il centro della conica, ossia d_1 è il diametro coniugato a π_1.

Nello stesso modo si dimostra il teorema inverso.

Corollari. — 1°. *Se* π *è il piano diametrale coniugato ad una retta* d, *e* d′ *è una retta di* π, *il piano diametrale* π' *coniugato a* d′ *è parallelo a* d.

Fra le corde parallele alla retta *d′* consideriamo quelle che incontrano la d_1 che passa per V ed è parallela a *d*. Esse sono divise per metà da d_1 dunque il piano diametrale π' coniugato a *d′* passa per d_1.

2° *Esistono infinite terne di piani, passanti pel vertice di una superficie conica, tali che ciascuno di essi sia il piano diametrale coniugato alla retta comune agli altri due, e che ciascuna retta comune a due di questi piani sia il diametro coniugato al terzo.*

Condotto per il vertice V un piano π_1, sia d_1 il suo diametro coniugato; per d_1 si conduca un piano arbitrario π_2 e sia d_2 il suo diametro coniugato che, per il corollario precedente, deve giacere in π_1. Infine il piano π_3 determinato dalle rette d_1, d_2 deve avere per diametro coniugato una retta d_3 giacente in π_1 e π_2, ossia d_3 è la retta $\pi_1\pi_2$.

3°. *Se* d_1 *è il diametro coniugato ad una direzione* d *rispetto ad una conica centrale, il diametro coniugato alla direzione* d_1 *deve essere parallelo a* d.

Infatti se *d* è una retta che passa per il centro della conica e

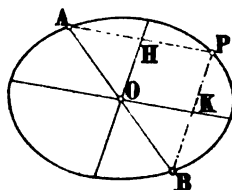
d_1 è il suo diametro coniugato, i piani Vd, Vd_1 sono coniugati rispetto alla superficie conica.

DEFINIZIONE. — *Due rette passanti pel centro di una conica centrale si chiamano* **diametri coniugati,** *se ciascuna di esse divide per metà le corde parallele all'altra.*

21. DEFINIZIONE. — *Due corde di una conica che congiungono un punto di essa coi punti d'incontro della medesima con un diametro si chiamano* **corde supplementari.**

TEOREMA. — *Due corde supplementari di una conica centrale sono parallele a due diametri coniugati.*

Fig. 13.

Infatti, se P è un punto di una conica centrale, AB un suo diametro, O il centro, le due rette OH, OK che congiungono il centro O coi punti di mezzo H, K delle corde, AP, BP sono i diametri coniugati a queste corde e sono parallele alle BP, AP rispettivamente.

Assintoti dell' iperbole.

22. TEOREMA. — *Il diametro che divide per metà le corde di un'iperbole parallele ad una data direzione, divide anche per metà i segmenti paralleli a questa stessa direzione che hanno gli estremi sugli assintoti.*

Se α è il piano dell'iperbole, α_v il piano ad esso parallelo condotto per il vertice V della superficie conica, r, r' le generatrici contenute nel piano α_v, π, π' i piani tangenti alla superficie lungo r, r', le rette r_1, r'_1 intersezioni di α con π, π' sono per la definizione stabilita nel § 3 gli assintoti dell' iperbole. Per il corollario del § 19 la retta $d = \pi\pi'$ è il diametro coniugato al piano α_v o α.

Se ora consideriamo una direzione qualunque d' contenuto in questo piano, il piano diametrale σ', coniugato ad essa, passa per d e divide per metà tutte le corde della superficie conica parallele a d ed anche quelle limitate fra i piani π, π'. Ne viene per conseguenza che la retta $\alpha\sigma'$ divide per metà tanto le corde della data iperbole quanto quelle della coppia di rette r_1, r'_1 parallele a d.

Apparisce quindi manifestamente che il punto d' incontro dei due assintoti r_1, r_1' deve giacere sul diametro $\alpha\sigma'$.

COROLLARI. — 1°. *Ogni segmento tangente ad un' iperbole, avente i suoi estremi sugli assintoti, è diviso per metà dal punto di contatto.*

2°. *Il punto d'incontro degli assintoti dell' iperbole è il centro della medesima.*

Infatti il punto d'incontro degli assintoti dovendo trovarsi su tutti i diametri dell' iperbole deve coincidere col punto comune a questi, cioè col centro dell' iperbole.

23. Teorema. — *Un' iperbole non ha nessun punto comune coi suoi assintoti, ma la distanza di un punto di esso dagli assintoti decresce indefinitamente quando cresce indefinitamente la distanza del punto stesso dal centro.*

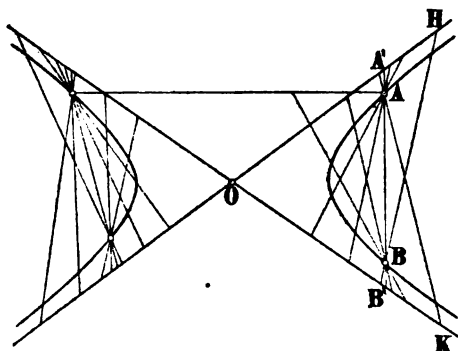



Fig. 14.

Se OH, OK sono gli assintoti di un'iperbole ed A un punto della medesima (fig. 15), è chiaro che si può facilmente ottenere quanti punti si vogliono della curva conducendo per A una secante qualsiasi che tagli le OH, OK in A'. B' e prendendo su essa B'B=AA' (§ 22, Teor.). La distanza di B dall'assintoto OK è eguale alla proiezione di AA' sopra una perpendicolare ad OK, e perciò tende a zero quando la retta A'B' tende ad essere parallela ad OK.

24. Teorema. — *L'angolo che ciascuno degli assintoti fa col suo asse principale è l'angolo acuto di un triangolo rettangolo che ha per ipotenusa la distanza focale* 2c *e per cateto la distanza dei vertici* 2a, *compreso fra questi lati.*

Ricordando la costruzione fatta per tagliare un dato cono con un piano in modo che la sezione prodotta sia eguale ad una data iperbole (§ 13, fig. 12) si vede che, se si conduce per EE' il piano perpendicolare all'asse della superficie e in esso per E' la corda KK' perpendicolare ad EE', le rette VK, VK' sono parallele agli assintoti e VE' è parallela all'asse dell'iperbole, dunque l'angolo di un assintoto con l'asse è eguale all'angolo $E'\widehat{V}K$ del triangolo rettangolo E'VK che ha per ipotenusa $VK = VE = 2c$ e per cateto $VE' = 2a$.

COROLLARIO. — *La distanza di un punto* P *di un'iperbole da un fuoco è eguale al segmento parallelo ad uno qualunque degli assintoti compreso fra il punto* P *e la direttrice corrispondente a quel fuoco.*

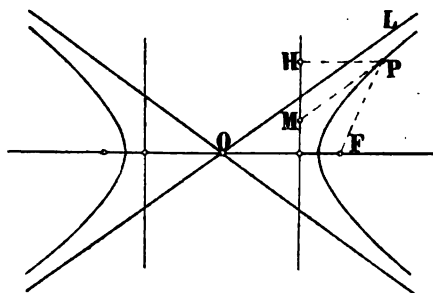



Fig. 15.

Se PH è la distanza di P dalla direttrice corrispondente al fuoco F, PM il segmento parallelo ad un assintoto condotto da P alla direttrice stessa, si ha che $\widehat{HPM}$ è eguale all'angolo dell'asse con un assintoto, e perciò si ha

$$\frac{PM}{PH} = \frac{2c}{2a} = e,$$

ma si ha anche (§ 11, Teor. e Cor. 1°)

$$\frac{PF}{PH} = e\,;$$

perciò

$$PF = PM\,.$$

G. LAZZERI.

(Continua)

LA RECENTE RIFORMA DEGLI STUDI SECONDARI IN FRANCIA

del 30 maggio 1902

(Decreti del 27, 28 luglio ed 8 settembre 1905)

Poichè da molto tempo si parla in Italia di una riforma della scuola secondaria, crediamo che riuscirà grato ai nostri lettori conoscere la riforma di recente effettivamente compiuta in Francia, per la parte che si riferisce alla matematica; e perciò abbiamo voluto pubblicare i nuovi programmi delle scuole francesi; nel numero successivo pubblicheremo le istruzioni che vanno unite ai medesimi.

Per la perfetta intelligenza dei medesimi premettiamo poche notizie sommarie sull'ordinamento generale delle scuole secondarie in Francia.

L'insegnamento secondario fa seguito a un corso di *Studi primari* d'una durata normale di quattro anni, ed è costituito d'un corso di studi della durata di sette anni diviso in due *cicli.*

Primo ciclo. — Durata: quattro anni; classi VI, V, IV, III (dette *de sixième, de cinquième, de quatrième* e *de troisième*).

In questo primo ciclo gli allievi hanno la scelta fra due divisioni. Nella divisione A sono obbligatori il latino e il greco; nella divisione B manca l'insegnamento del latino e greco e si dà maggiore sviluppo all'insegnamento del Francese, delle scienze, del disegno, ecc. Questo primo ciclo conduce ad un *certificato di studi secondari* di primo grado.

Secondo ciclo. — Durata: tre anni; classi II e I (dette *de seconde* e *de première*) e classe di filosofia o classe di matematiche.

In questo secondo ciclo gli studenti possono scegliere fra quattro sezioni

Sezione A. — Latino e greco.
" *B.* — Latino con uno studio più sviluppato delle lingue vive.
" *C.* — Latino con uno studio maggiore delle scienze.
" *D.* — Lingue vive e scienze senza latino.

Programmi.

I programmi del 30 maggio 1902 per l'insegnamento delle matematiche nelle classi secondarie dei licei e collegi maschili sono modificati come segue. (Decreti del 27, 28 luglio ed 8 settembre 1905.)

Quinta B (ore 4).

Aritmetica. — Numerazione decimale. Addizione e sottrazione dei numeri interi. Moltiplicazione dei numeri interi. Prodotto di una somma o di una differenza per un numero. Prodotto dei fattori. Potenze. Divisione dei numeri interi. Regola pratica. Caratteri di divisibilità per 2, 5, 9, 3. Numeri primi. Regole pratiche per la scomposizione di un numero in prodotto di fattori primi, per la ricerca del massimo comun divisore e del minimo multiplo comune. Revisione del sistema metrico.

Geometria (vedi Istruzioni). — Uso della riga, della squadra, del compasso e del rapportatore. Linea retta e piano. Angoli. Simmetria rispetto ad una retta. Triangoli. Triangolo isoscele. Casi d'eguaglianza dei triangoli. Perpendicolare ed oblique. Casi d'eguaglianza dei triangoli rettangoli. Rette parallele. Somme d'angoli di un trian-

golo, di un poligono convesso. Parallelogramma. Rettangolo. Losanga. Quadrato. Circolo. Diametro. Corde ed archi. Tangente. Posizioni reciproche di due circoli. Misura degli angoli. Costruzioni d'angoli e triangoli. Tracciamento delle perpendicolari e delle parallele. Costruzioni di circoli, di tangenti.

DISEGNO GEOMETRICO. — Esecuzione cogli istrumenti delle costruzioni spiegate durante il corso di geometria. Problemi ed esercizî semplici cencernenti ugualmente il corso di geometria; esecuzione grafica della soluzione trovata. Disegni geometrici in cui entrano linee rette e circoli, tolti da motivi di decorazione e di superficie piane: pavimentature in legno, in marmo, mosaici, vetri; acquarelli all'inchiostro della Cina ed in colore di alcuni di questi disegni.

Quarta B (5 ore).

ARITMETICA. — Frazioni ordinarie. Operazioni. Frazioni decimali. Grandezze proporzionali direttamente e inversamente. Operazioni sui numeri decimali. Regola pratica per l'estrazione della radice quadrata da un numero intero o decimale a meno di una unità decimale di un ordine dato. Progressioni aritmetiche e geometriche. Somma dei termini delle progressioni limitate. Metodi commerciali del calcolo dell'interesse e sconto. Polizza di sconto. Conti correnti. Nozioni sommarie sui valori.

GEOMETRIA. — Punti che dividono una retta in un rapporto dato. Linee proporzionali. Proprietà delle bisettrici di un triangolo. Triangoli simili. Definizione del seno, del coseno e della tangente di un angolo. Definizione delle figure omotetiche. Poligoni simili. Pantografo. Relazioni metriche in un triangolo rettangolo. Costruzioni della quarta proporzionale e della media geometrica. Poligoni regolari: quadrato, esagono e triangolo equilatero. Misura della circonferenza (enunciato). Misura delle aree del rettangolo, del parallelogramma, del triangolo, dei poligoni. Rapporto delle aree di due poligoni simili. Area del cerchio. Costruzione di alcune curve semplici, come la cissoide, le concoidi, ecc.

DISEGNO GEOMETRICO. — Programma eguale a quello della classe precedente. Aggiungere la costruzione grafica di luoghi geometrici, ed il tracciamento delle curve a penna.

Terza B (4 ore).

ALGEBRA. — Numeri positivi e negativi. Operazioni. Applicazioni concrete. Monomî, polinomî. Addizione, sottrazione, moltiplicazione dei monomî e polinomî. Identità:

$$x^m - a^m = (x - a)(x^{m-1} + ax^{m-2} + \ldots + a^{m-1}).$$

Divisione dei monomî. Equazioni numeriche di primo grado ad una o due incognite. Variazione e segno dell'espressione $ax+b$; rappresentazione grafica. Equazioni di secondo grado. Relazioni tra i coefficienti e le radici.

Variazioni del trinomio di secondo grado, della funzione $\frac{ax+b}{a'x+b'}$; rappresentazione grafica.

Uso delle tavole di logaritmi e di antilogaritmi a quattro decimali. Interessi composti.

Geometria. — Del piano e della retta nello spazio. Angolo diedro. Rette e piani paralleli. Retta e piano perpendicolari. — Proiezione di un poligono, di un circolo; ombre di una figura piana sopra un piano in geometria quotata. Definizione degli angoli poliedri, del prisma, della piramide. Proiezioni, ombre proprie e portate sopra un piano. Superficie e volumi del prisma e della piramide. Cono, cilindro, piano tangente. Sfera, cono e cilindro circoscritti. Superficie di rivoluzione. Sezioni piane della sfera. Poli. Ombre proprie e portate sopra un piano. Superficie e volumi del cono e del cilindro di rivoluzione. Superficie e volume della sfera (enunciato). Indicazioni atte a facilitare l'esecuzione dell'acquarello. Rilevamento dei piani, agrimensura, livellamento.

Seconda C, D (ore 5).

Algebra. — Operazioni sui numeri positivi o negativi. Monomî; polinomî; termini simili.

Operazioni. — Addizione, sottrazione, moltiplicazione dei monomî e polinomî. Identità:

$$x^m - a^m = (x-a)(x^{m-1} + ax^{m-2} + \dots a^{m-1}).$$

Divisione dei monomî. Risoluzione delle equazioni di primo grado ad un'incognita. Ineguaglianza di primo grado. Risoluzione e discussione di due equazioni di primo grado a due incognite.

Problemi; messa in equazione. Discussione dei resultati.

Variazione dell'espressione $ax+b$; rappresentazione grafica.

Equazione di secondo grado ad una incognita (non verrà fatta la teoria degli imaginari). Relazioni tra i coefficienti e le radici.

Esistenza e segno delle radici. Studio del trinomio di secondo grado. Variazione del trinomio di secondo grado; rappresentazione grafica.

Variazione dell'espressione $\frac{ax+b}{a'x+b'}$; rappresentazione grafica.

Nozione della derivata; significato geometrico della derivata. Il segno della derivata indica il senso della variazione; applicazioni ad esempî numerici semplicissimi e particolarmente alle funzioni precedentemente studiate.

Progressioni aritmetiche e progressioni geometriche. Logaritmi.

Uso delle tavole di logaritmi a quattro o cinque decimali. Interessi composti.

GEOMETRIA (figure piane) - *Linea retta e piano.* — Angoli, sensi di un angolo. Rette perpendicolari. Triangoli. Triangolo isoscele. Caso d'eguaglianza dei triangoli. Perpendicolare ed oblique. Triangolo rettangolo. Casi d'eguaglianza. Definizione di un luogo geometrico. Luogo geometrico dei punti equidistanti da due punti o da due rette. Rette parallele. Somma degli angoli di un triangolo, di un poligono convesso. Parallelogrammi. Figure simmetriche rispetto ad un punto o ad una retta. Due figure piane simmetriche sono eguali. Traslazione di una figura piana di forma invariabile.

CIRCOLI. — Intersezione di una retta e di un circolo. Tangente al circolo; le due definizioni della tangente. Archi e corde. Posizioni relative di due circoli. Misura degli angoli. Movimento di rotazione intorno ad un punto. Ogni spostamento di una figura piana di forma invariabile nel proprio piano si riduce ad una rotazione o ad una traslazione.

LUNGHEZZE PROPORZIONALI. — Punti che dividono un segmento in un rapporto dato. Definizione della divisione armonica. Triangoli simili. Ogni parallela ad uno dei lati di un triangolo divide gli altri due lati in parti proporzionali. Reciproco. Definizione di un fascio armonico.

Proprietà delle bisettrici di un triangolo. Luogo geometrico dei punti per i quali il rapporto delle distanze da due punti fissi è costante.

Nozioni semplici sull'omotetia. Poligoni simili. Seno, coseno, tangente e cotangente degli angoli compresi tra 0 e 2 retti. Relazioni metriche in un triangolo rettangolo ed in un triangolo qualunque. Linee proporzionali nel circolo. Quarta proporzionale; media proporzionale.

Poligoni regolari. Inscrizione nel circolo del quadrato, dell'esagono, del triangolo equilatero, del decagono, del pentadecagono. Due poligoni regolari di un egual numero di lati sono simili. Rapporto dei loro perimetri. Lunghezza di un arco di circolo. Rapporto tra la circonferenza ed il diametro. Calcolo di π. (Limitarsi al metodo dei perimetri.)

AREA DE' POLIGONI; AREA DEL CIRCOLO. — Misura dell'area del rettangolo, del parallelogramma, del triangolo, del trapezio, di un poligono qualunque. Rapporto delle aree di due poligoni simili. Area di un circolo, di un settore e di un segmento del circolo. Rapporto delle aree di due circoli.

Nozioni di agrimensura. Uso delle catene e della squadra agrimensoria.

Prima C e D (ore 5).

Geometria. — Piano e linea retta. Determinazione di un piano. Paralellismo delle rette e dei piani. Retta e piano perpendicolare. Proprietà della perpendicolare e delle oblique condotte dallo stesso punto ad un piano. Angolo diedro. Senso. Angolo piano corrispondente ad un angolo diedro.

Piani perpendicolari tra loro. Proiezione di un'area piana. Traslazione. Rotazione intorno ad un asse. Simmetria rispetto ad una retta. Simmetria rispetto ad un punto. Simmetria rispetto ad un piano. Questo secondo modo di simmetria si riduce al primo.

Angoli triedri. — Disposizione degli elementi. Triedri simmetrici. Ogni faccia di un triedro è minore della somma delle altre due. Limite della somma delle facce di un angolo poliedro convesso. Triedri supplementari. Applicazioni. Casi d'uguaglianza dei triedri.

Omotetia. — Sezioni piane parallele d'angoli poliedri. Aree.

Poliedri. — Poliedri omotetici, poliedri simili. Prismi. Piramide.

Nozioni sommarie sulle simmetrie del cubo e dell'ottaedro regolare.

Volumi dei parallelopipedi e dei prismi. Volume della piramide.

Volume del tronco di piramide a basi parallele. Volume del tronco di prisma triangolare.

Rapporto dei volumi di due poliedri simili.

Due poliedri simmetrici sono equivalenti.

Cilindro a base circolare. Piano tangente.

Cono a base circolare. Piano tangente. Sezioni parallele alla base.

Superficie di rivoluzione semplici: cilindro, cono.

Sfera. Sezioni piane. Poli. Piano tangente. Cono e cilindro circoscritti.

Superficie laterale del cilindro e del cono di rivoluzione.

Volume del cilindro e del cono a base circolare.

Area della zona. Area della superficie sferica. Volume della sfera.

Geometria descrittiva. — Proiezione e quota di un punto. Rappresentazione della retta. Pendenza. Distanza tra due punti. Rette concorrenti. Rette parallele. Rappresentazione del piano. Scale di pendenza. Piani paralleli. Ribaltamento su di un piano orizzontale. Angolo di due rette. Distanza tra un punto ed una retta. Intersezioni di rette e piani. Applicazione ai problemi d'ombre e di sezioni piane di prismi e di piramidi. Rette e piani perpendicolari. Distanza tra un punto ed un piano. Angolo di una retta e di un piano. Angolo di due piani. Applicazione alla costruzione di poliedri semplici. Rappresentazione del punto, della retta e del piano mediante due piani di proiezione. Intersezioni di rette e di piani. Rette e piani paralleli. Rette e piani perpendicolari. Ribaltamento di un piano sopra un piano orizzontale. Cambiamento del piano verticale.

Riprendere i problemi già enunciati relativamente alle distanze, angoli, ombre e sezioni piane.

Trigonometria. — Funzioni circolari (seno, coseno, tangente e cotangente). Relazioni tra le funzioni circolari di un medesimo arco. Calcolo delle funzioni circolari di alcuni archi: $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$ ecc. Teoria delle proiezioni. Formule d'addizione pel seno, il coseno e la tangente. Espressione di $\operatorname{sen} 2a$, $\cos 2a$, $\operatorname{tg} 2a$. Tutte le funzioni circolari dell'arco a si esprimono razionalmente come funzione di $\operatorname{tg} \frac{1}{2} a$. Conoscendo $\cos a = b$, trovare i valori del sen e del cos degli archi $\frac{1}{2} a$; scelta dei valori corrispondenti ad un arco a dato.

Conoscendo $\operatorname{tg} a$, trovare i valori delle tg degli archi $\frac{1}{2} a$; scelta del valore corrispondente ad un arco a dato.

Trasformare in prodotto la somma e la differenza di due funzioni circolari, seno, coseno o tangente. Problema inverso. Espressione della forma

$$a \cos(\omega t + \alpha) + \cos(\omega t + \beta)$$

ove t designa la sola variabile.

Uso delle tavole di logaritmi a quattro o cinque decimali.

Risoluzione dei triangoli rettangoli. Risoluzione e discussione di alcune equazioni trigonometriche semplici. Relazioni tra i lati e gli angoli di un triangolo. Risoluzione dei triangoli.

Algebra. — Equazione e trinomio di secondo grado. Caso in cui la variabile è una linea trigonometrica. Calcolo delle derivate di funzioni semplici. Studio delle variazioni e della rappresentazione grafica.

Studio di un movimento rettilineo mediante la teoria delle derivate. Velocità ed accelerazione. Moto uniformemente vario.

(I professori dovranno applicare le teorie d'algebra a numerosi esempî tratti sia dall'algebra, sia dalla trigonometria, sia dalla geometria).

Classe di Matematiche (ore 8).

Aritmetica. — Numerazione decimale. Addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione dei numeri interi. Teoremi fondamentali riguardanti quelle operazioni. Spiegazione delle regole pratiche per eseguire le operazioni.

Non si cambia il resto di una somma, di una differenza, di un prodotto, aumentando o diminuendo un termine od un fattore di un multiplo del divisore. Resti della divisione di un numero intero per 2, 5, 4, 25, 8, 125, 9, 3, 11. Caratteri di divisibilità per ciascheduno di questi numeri.

Massimo comun divisore di due o più numeri. Numeri primi tra di loro.

Ogni numero che divide un prodotto di due fattori ed è primo con uno di questi fattori, divide l'altro.

Minimo comune multiplo di due o più numeri.

Definizione e proprietà elementari de' numeri primi. Scomposizione di un numero intero in un prodotto di fattori primi. Tale scomposizione non può farsi che in un sol modo. Composizione del massimo comun divisore e del minimo comune multiplo di due o più numeri scomposti in fattori primi.

Frazioni ordinarie. Riduzione di una frazione alla sua più semplice espressione. Riduzione di più frazioni al medesimo denominatore. Minimo comun denominatore. Operazioni sulle frazioni ordinarie.

Numeri decimali. Operazioni (considerando le frazioni decimali come caso particolare delle frazioni ordinarie). Calcolo d'un quoziente con una approssimazione decimale data.

Riduzione di una frazione ordinaria in frazione decimale; condizione di possibilità. Quando la riduzione è impossibile, la frazione ordinaria può riguardarsi come limite di una frazione decimale periodica illimitata.

Quadrato di un numero intero o frazionario; composizione del quadrato della somma di due numeri. Il quadrato di una frazione non è mai uguale ad un numero intero. Definizione ed estrazione della radice quadrata di un numero intero o frazionario con una approssimazione decimale data.

Sistema metrico. Esercizî.

Rapporto di due numeri. Rapporti eguali. Divisione in parti proporzionali.

Misura delle grandezze. Definizione del rapporto di due grandezze della stessa specie.

Teorema: Il rapporto di due grandezze della stessa specie è uguale al quoziente dei numeri che le misurano.

Grandezze direttamente e inversamente proporzionali. Problemi.

Definizione dell'errore assoluto e dell'errore relativo. Determinazione del limite superiore dell'errore commesso sopra una somma, una differenza, un prodotto, un quoziente, conoscendo i limiti superiori degli errori i cui dati sono errati.

Algebra. — Numeri positivi e negativi. Operazioni su detti numeri.

Monomî, polinomî; addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione de' monomî e de' polinomî.

Principî relativi alla risoluzione delle equazioni. Equazioni di primo grado.

Equazione di secondo grado ad una incognita. (Non si svilupperà la teoria degli imaginari.) Equazioni semplici che si riducono ad esse.

Inequazioni di primo e secondo grado. Problemi di primo e secondo grado.

Progressioni aritmetiche e progressioni geometriche. Somma dei quadrati e cubi degli n primi numeri interi.

Logaritmi volgari. Uso delle tavole a cinque decimali. Interessi composti ed annualità.

Coordinate di un punto. Rappresentazione di una retta mediante un'equazione di primo grado. Coefficiente angolare di una retta. Costruzione di una retta mediante la sua equazione.

Variazioni e rappresentazioni grafiche delle funzioni.

$$y = ax + b; \qquad y = \frac{ax+b}{a'x+b'}; \qquad y = ax^2 + bx + c;$$
$$y = ax^4 + bx^2 + c.$$

Derivata di una somma di un prodotto, di un quoziente, della radice quadrata di una funzione, di $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$.

Applicazione allo studio delle variazioni, alla ricerca de' massimi e minimi di alcune funzioni semplici, specialmente delle funzioni della forma

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}; \qquad x^2+px+q$$

ove i coefficienti hanno valori numerici.

Derivate dell'area di una curva considerate come funzione delle ascisse. (Si ammetterà la nozione d'area.)

(Il professore lascerà da parte tutte le questioni sottili sollevate da un'esposizione rigorosa delle teorie delle derivate; avrà specialmente in mira le applicazioni e non esiterà a rivolgersi all'intuizione).

Trigonometria. — Funzioni circolari. Addizione e sottrazione degli archi. Moltiplicazione e divisione per 2. Risoluzione de' triangoli.

Applicazioni della trigonometria alle varie quistioni relative al rilevamento dei piani.

(Non si parlerà della costruzione delle tavole trigonometriche).

Geometria. — Rette. Angoli. Paralellismo. Poligoni. Circolo. Piano; rette e piani. Angoli diedri; angoli poliedri.

Traslazione. Rotazione. Simmetrie.

Omotetia e similitudine. Relazioni metriche. Poligoni regolari.

Prisma, piramide, cilindro, cono, sfera.

Aree e volumi.

Potenza di un punto rispetto ad un circolo e rispetto ad una sfera.

Assi radicali. Piani radicali.

Polare di un punto rispetto ad un circolo; piano polare di un punto rispetto ad una sfera.

Inversione. Applicazioni. Apparecchi di Peaucellier. Proiezione stereografica.

Vettori. — Proiezione di un vettore sopra un asse; momento lineare rispetto ad un punto; momento rispetto ad un asse.

Somma geometrica di un sistema di vettori; momento risultante rispetto ad un punto; somma dei momenti rispetto ad un asse.

Applicazione ad una coppia di vettori.

Proiezioni centrali. — Piano del quadro. Prospettiva di un punto di una retta, di una linea. Punto di fuga di una retta. Prospettiva di due rette parallele. Retta di fuga di un piano. Concetto di retta all'infinito di un piano.

Coniche - Ellisse. — Tracciamento; tangente; problemi semplici sulle tangenti. Equazione dell'ellisse riferita ai proprî assi. Ellisse considerata come proiezione del circolo; problemi semplici sulle tangenti; intersezione dell'ellisse e di una retta.

Iperbole. — Tracciamento, tangente, assintoti; problemi semplici sulle tangenti. Equazione dell'iperbole riferita a' suoi assi.

Parabola. — Tracciamento, tangente; problemi semplici sulle tangenti. Equazione della parabola riferita al proprio asse ed alla tangente nel vertice.

Definizione comune di queste curve mediante un fuoco ed una direttrice.

Sezioni piano di un cono e di un cilindro di rivoluzione.

Geometria descrittiva. — Ribaltamenti. Cambiamento di un piano di proiezione; rotazione intorno ad un asse perpendicolare ad un piano di proiezione.

Applicazione alle distanze ed agli angoli: distanza di due punti, di un punto da una retta, di un punto da un piano; minima distanza di due rette, una delle quali sia verticale o di due rette parallele ad uno stesso piano di proiezione; perpendicolare comune a queste due rette. Angolo di due rette; angolo di una retta e di un piano; angolo di due piani.

Proiezione del circolo. Sfera; sezione piana, intersezione con una retta. Cono e cilindro a direttrice circolare; piano tangente passante per un punto o parallelo ad una retta; ombre; contorni apparenti; sezioni piane. Coni e cilindri circoscritti alla sfera. Ombre.

Rappresentazione di una superfice per mezzo di curve di livello. Quota di un punto della superficie la cui proiezione orizzontale è data. Pendenza d'una linea tracciata sopra una superficie. Linee di eguale pendenza. Linee di massima pendenza.

Applicazione delle precedenti considerazioni alle carte topografiche.

Planimetria e livellamento. Linee e colori convenzionali. Lettura di una carta e specialmente di quella dello Stato Maggiore. Uso della carta sul terreno.

Cinematica. — Unità di lunghezza e tempo. Del moto. Sua relatività. Traiettoria di un punto. Esempi di moto.

Moto rettilineo: Moto uniforme; velocità, sua rappresentazione mediante un vettore. Moto vario; velocità media; velocità ad un momento dato; sua rappresentazione mediante un vettore; accelerazione media; accelerazione ad un dato momento, sua rappresentazione mediante un vettore. Moto uniformemente vario.

definite come vettori. Valore algebrico della velocità. Odografo. Accelerazione.

Moto circolare uniforme, velocità angolare; proiezione sopra un diametro, moto oscillatorio semplice sopra una retta.

Cambiamento di sistema di comparazione. Composizione delle velocità.

Esempî ed applicazioni (non si insista sulle applicazioni puramente geometriche).

Moto di traslazione di un corpo solido. Scorrimento rettilineo.

Moto rotatorio di un corpo solido intorno ad un asse. Alberi e cuscinetti. Perni e cuscinetti. Arpioni e cerniere.

Studio geometrico dell'*elice*. Movimento ellissoidale d'un corpo. Vite e madrevite.

Trasformazioni semplici di movimenti studiati dal punto di vista pratico: correggie di trasmissione, ruote dentate, bielle e manovelle. (Non si studiano dettagliatamente i meccanismi.)

Dinamica e Statica. — Punto materiale. Inerzia. Forza: sua rappresentazione mediante un vettore. Massa. Indipendenza degli effetti delle forze. Composizione delle forze.

Equilibrio di un punto materiale libero. Equilibrio di un punto materiale sopra una curva od una superficie. Equilibrio di un punto materiale sopra un piano, quando si tiene conto dell'attrito. Moto di un punto pesante libero secondo una verticale.

Movimento parabolico di un punto pesante.

Attrito di scorrimento. Moto d'un punto pesante sulla linea di massima pendenza d'un piano, con o senza attrito.

Lavoro di una forza applicata ad un punto materiale. Unità di lavoro.

Lavoro d'una forza costante, di una forza variabile. Lavoro elementare.

Lavoro totale. Valutazione grafica. Lavoro della risultante di parecchie forze. Teorema delle forze vive per un punto materiale. Esempî semplici.

Forze applicate ad un corpo solido. — Forze parallele. Centro delle forze parallele. Centro di gravità. Sua ricerca in alcuni casi semplici: triangolo, trapezio, quadrilatero, prisma, piramide.

Coppie, composizione di coppie. Riduzione delle forze applicate ad un solido a due forze o ad una forza e ad una coppia.

Condizioni d'equilibrio di un corpo solido. Caso di tre forze, di forze parallele, di forze situate in un medesimo piano.

Equilibrio di un corpo mobile intorno ad un asse fisso, ad un punto fisso oppure sottoposto a riposare sopra un piano fisso.

Macchine semplici in istato di riposo ed in istato di movimento. — Leva. Carico del punto d'appoggio. Verricello. Puleggia fissa e puleggia mobile.

Si verificherà che se una macchina semplice è in moto, avendo continuamente adempiuto alle condizioni d'equilibrio, il lavoro elementare della potenza è uguale e di segno contrario a quello della resistenza.

Enunciato del teorema generale delle forze vive. Applicazione alle macchine.

Lavoro motore e lavoro resistente.

Resistenze passive. Attrito.

Lavoro delle resistenze passive. Rendimento di una macchina.

Indicazioni sull'uso de' volani e de' freni.

Cosmografia - Sfera celeste. — Distanza angolare. Altezza e distanza zenitale. Teodolite. Leggi del moto diurno. Meridiano. Polo. Giorno siderale. Ascensione retta e declinazione. Canocchiale meridiano.

Terra. — Coordinate geografiche. Dimensioni e rilievo della Terra. Mappamondo. Carte.

Sole. — Movimento proprio apparente sulla sfera celeste. Eclittica. Ineguaglianza dei giorni e delle notti alle differenti latitudini. Stagioni. Anno tropico ed anno sidereo.

Ora siderea; ora media; ora legale. Calendari giuliano e gregoriano.

Luna. — Movimento proprio apparente sulla sfera celeste.

Fasi. — Rotazione. Variazione del diametro apparente. Eclissi di Luna e di Sole.

Pianeti. — Sistema di Copernico. Leggi di Keplero.

Legge di Newton e sue conseguenze. Nozioni sommarie sulle distanze, le dimensioni, la costituzione fisica del sole, dei pianeti e dei loro satelliti. Comete, stelle cadenti; bolidi. Stelle; costellazioni. Nebulose. Via lattea.

Quarta A (ore 2 normali).

Aritmetica. — Prodotto di una somma e di una differenza per un numero. Prodotto di fattori. Potenza.

Caratteri di divisibilità per 2, 5, 9, 3.

Numeri primi. Regole pratiche per la scomposizione di un numero in prodotto di fattori primi, per la ricerca del massimo comun divisore e del minimo multiplo comune.

Proporzioni. Esercizi sul sistema metrico, le frazioni e le grandezze direttamente e inversamente proporzionali. Regola pratica per l'estrazione della radice quadrata di un numero intero o decimale a meno di una unità decimale di un ordine dato.

Geometria (vedi Istruzioni). — Uso della riga, della squadra, del compasso e del rapportatore.

d'eguaglianza dei triangoli.

Perpendicolare ed oblique. Casi d'eguaglianza de' triangoli rettangoli.

Rette parallele. Somma degli angoli d'un triangolo, d'un poligono convesso. Parallelogramma. Rettangolo. Losanga. Quadrato.

Circolo. Corde ed archi. Tangente. Posizioni relative dei due circoli.

Misura degli angoli.

Costruzioni elementari sulla retta ed il circolo.

Terza A (ore 3 normali).

Aritmetica. — Esercizî sul sistema metrico e le grandezze direttamente e inversamente proporzionali.

Algebra. — Numeri positivi e negativi. Operazioni. Applicazioni concrete. Monomî; polinomî. Addizione, sottrazione, moltiplicazione de' monomî e de' polinomî. Identità:

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$$

Divisione dei monomî. Equazioni numeriche di primo grado ad una o due incognite: disuguaglianza di primo grado ad un'incognita.

Geometria. — Problemi ed interrogazioni sul programma della classe precedente.

Punti che dividono una retta in un rapporto dato. Linee proporzionali.

Triangoli simili. Definizioni del seno, del coseno, della tangente e della cotangente di un angolo.

Definizione delle figure omotetiche. Poligoni simili. Pantografo.

Relazioni metriche in un triangolo rettangolo.

Proprietà delle secanti nel circolo. Costruzioni della quarta proporzionale e della media proporzionale.

Poligoni regolari: quadrato, esagono e triangolo equilatero.

Misura della circonferenza (enunciato).

Misura delle aree del rettangolo, del parallelogramma, del triangolo, del trapezio, dei poligoni, del cerchio.

Rapporti delle aree di due poligoni simili.

Seconda A, B (ore 2 pel primo semestre).

Algebra. — Esercizî sulle equazioni di primo grado e la rappresentazione delle variazioni della funzione $(ax + b)$.

Geometria. — Del piano e delle rette nello spazio.

Angolo diedro. Rette e piani paralleli. Retta e piano perpendicolari.

prismi, piramidi, cilindri, coni e sfere.

Prima A, B (ore 2 pel secondo semestre).

Algebra. — Esercizi sulle equazioni numeriche di primo grado, ad una o più incognite, e di secondo grado ad una incognita; rappresentazione delle variazioni di x^2 e $\frac{1}{x}$.

Geometria. — Misura degli angoli. Figure piane simili. Definizione del seno, del coseno e della tangente di un angolo compreso tra 0 e 2 retti.

Relazioni metriche nel triangolo e nel circolo. Misura delle aree piane.

Enunciato delle regole relative alle superficie ed ai volumi dei prismi, piramidi, cilindri, coni e sfere.

Classe di Filosofia
(ore 2 per le matematiche; 1 mezz'ora per la cosmografia).

Matematiche. — Richiamo delle regole principali relative al calcolo dei numeri positivi e negativi; sviluppi di $(a+b)^2$, $(a+b)^3$; identità $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + ... + b^n)$.

Nozioni sull'algebra geometrica dei Greci, rappresentazione di un numero mediante una linea, di un prodotto mediante la superficie di un rettangolo; figure equivalenti alle identità:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab.$$

Quadrato costruito sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo.

Costruzione di un rettangolo, avente un lato dato, equivalente ad un rettangolo dato.

Costruzione di un rettangolo equivalente ad un quadrato dato, conoscendo la somma e la differenza de' suoi lati; espressioni di questi lati resultanti dalla costruzione.

Risoluzione algebrica dell'equazione di secondo grado.

Applicazione al problema precedente; confronto dei risultati.

Vantaggi della notazione moderna e specialmente dell'introduzione dei numeri positivi e negativi.

Determinazione, mediante due numeri positivi o negativi, d'un punto di un piano; rappresentazione inversa di un sistema di due numeri per mezzo di un punto di un piano.

Estensione della nozione delle coordinate; longitudine e latitudine di un punto di una sfera.

dente da una sola variabile; curve delle temperature, delle pressioni; applicazione alla statica. Nozione di funzioni; rappresentazione grafica di funzioni semplicissime:

$$y = ax,\ y = ax + b,\ y = x^2,\ y = x^3,\ y = \frac{1}{x}.$$

Costruzione di una retta definita da una equazione numerica di primo grado tra x, y; coefficiente angolare, [1] ordinata all'origine. Coefficiente angolare della retta che congiunge due punti.

Uso della carta a quadretti. Risoluzione di due equazioni numeriche di primo grado a due incognite mediante l'intersezione di due rette, delle equazioni numeriche della forma:

$$x^2 + px + q = 0,\ x^3 + px + q = 0$$

mediante l'intersezione delle curve (una volta tracciate), aventi per equazioni:

$$y = x^2,\ y = x^3$$

colla retta la cui equazione è $y + px + q = 0$.

Grafico delle ferrovie.

Curve fornite dagli apparecchi registratori.

Costruzione di alcune curve semplici definite geometricamente; equazioni di tali curve.

Nozione della tangente e della derivata. Esempi di tangenti ottenute geometricamente come limiti di una secante (circolo, parabola). Coefficiente angolare della tangente: applicazioni ad alcuni casi semplici:

$$y = x^2,\ y = x^3,\ y = \frac{1}{x}.$$

Nozioni sull'uso della derivata per riconoscere il senso della variazione di una funzione.

Valutazione approssimata dell'area di una curva tracciata su carta a quadretti, contando i quadretti contenuti nell'interno della curva: limite dell'errore fornito dal numero dei quadretti traversati dalla curva: quest'errore può venir reso lievissimo adoperando quadrigliatura finissima.

Area del triangolo ottenuta come limite comune di due somme di rettangoli una delle quali inferiore, l'altra superiore all'area cercata. Area della parabola. Problema inverso della ricerca di una derivata. Area di un triangolo, o di una parabola, ottenuta colla ricerca di una funzione la cui derivata rispetto ad x è ax o ax^2.

Applicazione del metodo infinitesimale alla valutazione dei volumi e delle superficie dei corpi considerati in geometria elementare.

---

(1) Il coefficiente angolare sarà definito come il coefficiente di x nell'equazione risoluta rispetto ad y, o come l'ordinata del punto, di ascissa eguale all'unità, posto sulla parallela condotta per l'origine.

di quali si rivolge, non sono abituati alle matematiche, eviterà quindi ogni teoria astratta, non metterà innanzi le idee generali, ma cercherà di farle risaltare da esempî particolari, sviluppati colla lentezza ed il dettaglio che stimerà necessarî perchè sia ben seguito. Il programma precedente è destinato a guidarlo, ma non è uno stretto programma.

Il maestro sarà libero di svilupparne più o meno certe parti, secondo le attitudini dei proprî allievi, secondo l'interesse che avrà saputo suscitare in loro. Queste osservazioni riguardano specialmente le applicazioni di cui è fatta menzione sulla fine del programma e che, in ogni caso, dovranno venir trattate ampiamente, senza star troppo attaccati al rigore.

Si raccomanda al maestro d'introdurre nel proprio insegnamento alcune nozioni storiche; potrà quindi parlare del metodo d'esaustione presso gli antichi (Euclide, Archimede) e dare alcuni dettagli sull'invenzione del calcolo differenziale ed integrale. Il suo scopo è di contribuire allo sviluppo filosofico de' proprî scolari, facendo loro acquistare idee importanti.

Cosmografia. — Sistema di Copernico. Il Sole. Sue dimensioni, sua distanza dalla Terra. Costituzione fisica, rotazione, macchie.

Notizie sommarie sui pianeti. La Terra. Forma e dimensioni. Rotazione, poli, equatore, meridiani, paralleli. Longitudine. Latitudine.

La Luna. Moto. Costituzione fisica.

Comete. Stelle cadenti. Bolidi. Stelle. Nebulose. Via lattea.

I suddetti programmi saranno obbligatorî:

Principiando dall'anno scolastico 1905-1906, per le classi *Quinta B* e *Quarta A* (1° ciclo), come per la classe *Seconda A, B, C, D* (2° ciclo).

Cominciando dall'anno scolastico 1906-1907, per la classi *Quarta B* e *Terza A* (1° ciclo), come per la classe *Prima A, B, C, D* (2° ciclo).

Principiando dall'anno scolastico 1907-1908, per la classe *Terza* (1° ciclo), come per le classi di *Filosofia* e di *Matematiche* (2° ciclo).

PICCOLE NOTE

Sulle coppie di numeri interi che hanno un dato massimo comun divisore e un dato minimo comune multiplo.

Come utile esercizio, proponiamoci di risolvere — nel modo più generale — la seguente questione:

Determinare tutte le possibili coppie di numeri interi che abbiano come massimo comun divisore un dato numero m, *e come minimo comune multiplo un altro numero* m'.

è necessario che m' sia multiplo di m. Suppost
chiamo con x e y due numeri qualunque, avent
ed m' come minimo comune multiplo. [1] Ne s

$$xy = mm'.$$

E quindi

$$\xi\eta = q;$$

avendo posto

$$\xi = x : m, \qquad \eta = y : m,$$

Dunque, ad ogni coppia di numeri x e y, che
corrisponderà un'altra coppia di numeri ξ e η,
cui prodotto uguaglia il quoziente tra m' ed n

Reciprocamente, se ξ e η sono due numeri
prodotto il quoziente q, gli altri due numeri

$$x = m\xi, \qquad y =$$

avranno appunto per massimo comun divisore m

Si conclude pertanto: *La ricerca di tutte l
che soddisfino alle condizioni richieste, equival
coppie di numeri primi tra loro, il cui prod
minimo comune multiplo ed il massimo comun
moltiplichi ognuna di queste ultime coppie di n
sore prestabilito.*

Ora, se il quoziente q è un numero primo
primi tra loro, capaci di dare come prodotto il

$$(1, q).$$

Corrispondentemente, l'unica coppia di nu

$$(m, m').$$

Lo stesso dicasi nel caso in cui q sia potenza
allora gli unici divisori di p^n, oltre a 1 e p^n,

$$p, p^2, \dots, p^{n-1}$$

e due qualunque di questi non sono mai primi

Dunque: *Se il quoziente tra il minimo com
divisore assegnati è un numero primo, ovvero è
una sola coppia di numeri che soddisfino alle co
tuita dal detto massimo comun divisore e dal*

Quando invece il quoziente q non sia nè u
numero primo, ecco come procederemo per ott
zioni in coppie di fattori che risultino primi t

Osserviamo che, in tal caso, decomposto q

$$q = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots$$

essendo $p_1, p_2, \dots, p_n$ i *differenti* fattori primi
diversi dall'unità, sono quelli che si ottengono
voglia di p_i (con $i = 1, 2, \dots, n$) la quale abb
oppure formando il prodotto tra le analoghe pot

(1) Sempre ne esistono; giacchè, per esempio, i due
temente alle condizioni richieste.

riamo una potenza di p_1 con esponente minore di α_1, otterremo un divisore di q, il quale non è certamente primo col quoziente tra q e quel divisore medesimo; cioè tale divisore non potrà dar luogo ad una decomposizione di q nel prodotto di due numeri che siano primi tra loro: perchè in entrambi figurerebbe il fattore primo p_1. Ne segue che tutte le richieste decomposizioni di q si otterranno scegliendo come loro primo numero o l'unità, o una qualunque delle potenze

$$p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_n^{\alpha_n},$$

ovvero il prodotto di due o più di esse, combinate arbitrariamente; e come secondo numero, il prodotto delle potenze che rimangono (avvertendo che nel caso in cui si adoperasse, come primo numero, il prodotto $p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n} = q$, l'altro numero sarebbe evidentemente l'unità; e viceversa). Ma per ogni decomposizione che, in tal modo, mano mano si ottiene, bisognerà poi escludere quella che viene in seguito e che differisce dalla precedente solo per l'ordine dei due numeri che la compongono. Così, se abbiamo

$$q = p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} . p_3^{\alpha_3} . p_4^{\alpha_4},$$

scriveremo dapprima la decomposizione evidente

$$(1,\ p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} . p_3^{\alpha_3} . p_4^{\alpha_4}).$$

Poi le altre

$$(p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2} . p_3^{\alpha_3} . p_4^{\alpha_4}), \qquad (p_2^{\alpha_2},\ p_1^{\alpha_1} . p_3^{\alpha_3} . p_4^{\alpha_4}),$$
$$(p_3^{\alpha_3},\ p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} . p_4^{\alpha_4}), \qquad (p_4^{\alpha_4},\ p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} . p_3^{\alpha_3}).$$

Verranno in seguito le 6 decomposizioni

$$(p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2},\ p_3^{\alpha_3} . p_4^{\alpha_4}), \qquad (p_1^{\alpha_1} . p_3^{\alpha_3},\ p_2^{\alpha_2} . p_4^{\alpha_4}), \qquad (p_1^{\alpha_1} . p_4^{\alpha_4},\ p_2^{\alpha_2} . p_3^{\alpha_3}),$$
$$(p_2^{\alpha_2} . p_3^{\alpha_3},\ p_1^{\alpha_1} . p_4^{\alpha_4}), \qquad (p_2^{\alpha_2} . p_4^{\alpha_4},\ p_1^{\alpha_1} . p_3^{\alpha_3}), \qquad (p_3^{\alpha_3} . p_4^{\alpha_4},\ p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2}).$$

Ma di queste, le ultime 3 non differiscono sostanzialmente dalle prime 3. Lo stesso dicasi delle decomposizioni dove il primo numero è il prodotto di tre potenze: giacchè esse coincidono con quelle, già scritte, dove il primo numero è invece rappresentato da una sola potenza. Finalmente, la decomposizione che contiene come primo numero il prodotto di tutte e 4 le potenze che figurano in q, e come secondo numero l'unità, non differirà da quella evidente, già scritta al principio.

In base a queste osservazioni, concludiamo: *Se il quoziente* q *è della forma* (1), *ed il numero dei suoi fattori primi differenti è pari* (*cioè se* n = 2h), *per ottenere tutte le possibili decomposizioni di* q *in coppie di fattori che siano due numeri primi tra loro, basterà scegliere per uno di questi numeri o l'unità, ovvero una qualunque delle potenze*

$$p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_n^{\alpha_n},$$

ovvero i prodotti di queste n *potenze combinate, in tutti i modi possibili, due a due, tre a tre, ..., h ad h. Avvertendo però che delle combinazioni h ad h, soltanto una metà dovrà essere conservata.*

Quando invece il numero dei differenti fattori primi di q *sia dispari* (*cioè* n = 2h + 1), *si procederà ancora nel solito modo, arrestandoci sempre alle combinazioni* h *ad* h; *le quali però dovranno, in questo secondo caso, essere tutte conservate.*

Ne segue che il numero totale di quelle differenti decomposizioni di q sarà

$$1 + \binom{2h}{1} + \binom{2h}{2} + \ldots + \binom{2h}{h-1} + \tfrac{1}{2}\binom{2h}{h},$$

$$1+\binom{2h+1}{1}+\binom{2h+1}{2}+\ldots+\binom{2h+1}{h-1}+\binom{2h+1}{h},$$

secondo che n è pari o dispari.

Ma evidentemente si ha

$$1+\binom{2h}{1}+\binom{2h}{2}+\ldots+\binom{2h}{h-1}+\tfrac{1}{2}\binom{2h}{h}=$$
$$=\tfrac{1}{2}\left\{1+\binom{2h}{1}+\binom{2h}{2}+\ldots+\binom{2h}{h}+\ldots+\binom{2h}{2h}\right\},$$
$$1+\binom{2h+1}{1}+\binom{2h+1}{2}+\ldots+\binom{2h+1}{h-1}+\binom{2h+1}{h}=$$
$$=\tfrac{1}{2}\left\{1+\binom{2h+1}{1}+\binom{2h+1}{2}+\ldots+\binom{2h+1}{h}+\ldots+\binom{2h+1}{2h+1}\right\}.$$

Per conseguenza, il numero totale delle richieste decomposizioni di q sarà, in ogni caso, espresso da

$$\tfrac{1}{2}\left\{1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}\right\}.$$

E poichè è noto che si ha

$$1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n,$$

concluderemo che tali decomposizioni sono in numero di 2^{n-1}.

Osservisi poi che il caso in cui q sia un numero primo, o potenza di un numero primo, può includersi nel precedente, quando si faccia $n=1$. Giacchè allora il numero delle decomposizioni trovato innanzi si riduce ad 1; e difatti una sola decomposizione si ha in tal caso.

Ricordando infine che, se moltiplichiamo quelle coppie di numeri, precedentemente determinate, per il massimo comun divisore m, si ottengono tutte le possibili coppie di numeri che hanno come massimo comun divisore e come minimo comune multiplo i due numeri assegnati m ed m', concluderemo:

Il numero totale delle coppie di numeri che abbiano per massimo comun divisore m, *e per minimo comune multiplo* m', *è* 2^{n-1}*; essendo* n *il numero dei differenti divisori primi del quoziente fra* m' *ed* m.

M. Chini.

Una dimostrazione della formola di Meissel. [1]

Indicheremo con $\psi(n)$ il numero dei numeri primi inferiori ad n, con $f(n, l)$ il numero dei numeri minori di n (incluso n) e non divisibili per nessuno dei primi l numeri primi $p_1, p_2, \ldots, p_l$, dove $p_1=2$, e finalmente con $E\left(\frac{p}{q}\right)$ il massimo numero intero minore di $\frac{p}{q}$.

Ciò posto dimostriamo la seguente formola

$$\psi(n)=f(n, l)+l+d-1-\sum_{r=1}^{r=d} f\left\{E\left(\frac{n}{p_{1+r}}\right), l+r-1\right\} \tag{1}$$

dove è

$$d=\psi(\sqrt{n})-l.$$

(1) Vedi "Math. Ann.„ Bd II e III, oppure G. Wertheim, *Elem. der Zalenth.,* 1887 od anche Gazzaniga, *Teoria dei numeri,* Padova, Drucker, 1903.

togliamo da $f(n, l)$ l'unità, ed aggiungiamovi i primi l numeri primi: abbiamo così

$$f(n, l) + l - 1 \tag{2}$$

la quale formola darebbe il numero $\psi(n)$, ove tutti i numeri minori di n e non divisibili per alcuno dei primi l numeri primi fossero essi pure primi: ciò comporterebbe una restrizione, cioè $l = \psi(\sqrt{n})$ secondo il teorema di Eratostene: invece, nel caso più generale, converrà togliere dalla (2) il numero di quei numeri che son divisibili per $p_{l+1}\, p_{l+2} \ldots$ e sarà sufficiente arrestarsi a quel numero primo p_{l+d} che è immediatamente minore di $\sqrt{n}$: tale cioè che

$$l + d = \psi(\sqrt{n}) \qquad d = \psi(\sqrt{n}) - l.$$

In tale modo troviamo la condizione imposta alla formola (1). Supponiamo ora di aver levato dalla (2) il numero di tutti i numeri divisibili per $p_{l+1} \ldots p_{l+r-1}$ vogliamo ora togliere il numero di quelli che son divisibili per p_{l+r}. Per fare ciò basterà togliere il numero dei prodotti di p_{l+r} per tutti i numeri che non sono divisibili nè per p_1, nè per $p_2, \ldots,$ nè per p_{l+r-1} e tutti minori di $\mathrm{E}\left(\frac{n}{p_{l+r}}\right)$: cioè giusto le notazioni adottate il numero

$$f\left\{\mathrm{E}\left(\frac{n}{p_{l+r}}\right),\, l + r - 1\right\} - 1$$

dove abbiamo sottratto 1, per essere l'unità compresa nella f, mentre non fa al caso nostro essendo il prodotto di p_{l+r} per l'unità un numero primo. Eseguendo l'indicata operazione da $r = 1$ ad $r = d$ otteniamo che dalla (2) si devono togliere in tutto

$$\sum_{r=1}^{r=d} f\left\{\mathrm{E}\left(\frac{n}{p_{l+r}}\right),\, l + r - 1\right\} - d$$

numeri, e ne conseguirà la formola (1).

Per arrivare da questa alla formola di Meissel osserviamo che la espressione

$$f\left\{\mathrm{E}\left(\frac{n}{p_{l+r}}\right),\, l + r - 1\right\} \tag{3}$$

dà tutti numeri primi quando p_{l+r-1} sia immediatamente minore oppure maggiore di $\sqrt{\frac{n}{p_{l+r}}}$, per il che è necessario e basta che sia

$$p_{l+r} > \sqrt{\frac{n}{p_{l+r}}}$$

$$p^3_{l+r} > n. \tag{4}$$

Ponendo ora

$$p^3_{l+1} > n \tag{5}$$

la (4) è verificata qualunque sia r essendo $p_{l+r} \geqq p_{l+1}$. Ora la 5 sussiste quando si ponga p_l^3 immediatamente minore di n, cioè p_l immediatamente minore di $\sqrt[3]{n}$, o in altri termini

$$l = \psi(\sqrt[3]{n}).$$

Ciò posto per ottenere dalla (3) il numero dei numeri primi minori di $\mathrm{E}\left(\frac{n}{p_{l+r}}\right)$ *cioè* $\psi\left\{\mathrm{E}\left(\frac{n}{p_{l+r}}\right)\right\}$, ricordando una osservazione fatta alla formola (2), basterà to-

gliere dalla (3) l'unità ed aggiungervi i primi $l+r-1$ numeri primi: con che si ha

$$f\left\{E\left(\frac{n}{p_{l+r}}\right),\ l+r-1\right\}-1+l+r-1=\psi\left\{E\left(\frac{n}{p_{l+r}}\right)\right\}$$

$$f\left\{E\left(\frac{n}{p_{l+r}}\right),\ l+r-1\right\}=\psi\left\{E\left(\frac{n}{p_{l+r}}\right)\right\}-l-r+2$$

$$\sum_{r=1}^{r=d} f\left\{E\left(\frac{n}{p_{l+r}}\right),\ l+r-1\right\}=\sum_{r=1}^{r=d}\psi\left\{E\left(\frac{n}{p_{l+r}}\right)\right\}-dl-\frac{d(d+1)}{2}+2d$$

e finalmente sostituendo questa espressione nella (1),

$$\psi(n)=f(n,l)+l(d+1)+\frac{d(d-1)}{2}-1-\sum_{r=1}^{r=d}\psi\left\{E\left(\frac{n}{p_{l+r}}\right)\right\}$$

che presa coi significati introdotti e cioè

$$d=\psi(\sqrt{n})-l \qquad l=\psi(\sqrt[3]{n})$$

costituisce la formola di Meissel.

Per applicare questa formola ad un caso particolare, osserviamo che il calcolo dei termini sotto il segno Σ si può eseguire subito, quando n non sia troppo grande: altrimenti potremo servirci di nuovo della formola trovata: in quanto al calcolo di $f(n, l)$ possiamo usare l'espressione

$$f(n,l)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_l}\right) \text{ (1)} \qquad (6)$$

nel calcolo della quale in luogo di ogni termine della forma $\frac{n}{m}$ si costituisca $E\left(\frac{n}{m}\right)$ se $\frac{n}{m}$ non è già intero. Questa formola di non difficile dimostrazione richiede la conoscenza dei primi l numeri primi: si può però invece di essa adoperare l'altra

$$f(n,l)=f(n,\ l-1)-f\left\{E\left(\frac{n}{p_l}\right),\ l-1\right\} \text{ (2)} \qquad (7)$$

osservando che quando saremo arrivati ad $f(n, 1)$ potremo porre senz'altro in luogo di esso $n-E\left(\frac{n}{2}\right)$ come si ricava anche dalla (6): espressione di calcolo semplicissimo.

Vogliamo per esempio trovare il valore di $\psi(250)$. Calcoliamo dapprima le costanti l e d: osservando che $\psi(\sqrt[3]{n})$ coincide con $\psi[E(\sqrt[3]{n})]$ come pure

$$\psi(\sqrt{n})=\psi[E(\sqrt{n})]$$

avremo

$$E(\sqrt[3]{250})=6 \qquad \psi(6)=3 \qquad l=3$$
$$E(\sqrt{250})=15 \qquad \psi(15)=6 \qquad d=6-3=3$$

e quindi applicando la formola di Meissel

$$\psi(250)=f(250,\ 3)+14-\sum_{r=1}^{r=3}\psi\left\{E\left(\frac{250}{p_{3+r}}\right)\right\}.$$

Calcoliamo ora $f(250, 3)$ applicando successivamente la formola (7) si ha

$$f(250,\ 3)=f(250,\ 2)-f(50,\ 2)$$
$$f(250,\ 2)=f(250,\ 1)-f(83,\ 1).$$

Ma

$$f(50,\ 2)=f(50,\ 1)-f(16,\ 1)$$

(1) Cfr. GAZZANIGA, *op. cit.*, pag. 12.
(2) *Idem.*, pag. 28.

$$\varphi(x) = (-1)^n (1+x)^n \qquad \varphi'(x) = n(-1)^n (1+x)^{n-1}$$

e l'equazione proposta può scriversi, dopo soppresso il fattore $(-1)^n$,

$$(1+x)^n - n(1+x)^{n-1} = 0,$$

le cui radici sono evidentemente -1 e $\frac{1}{n-1}$, la prima delle quali è $(n-1)$-pla.

Altre risoluzioni dei sigg. dott. Fornari di Varese; prof. Cardoso di Savona; Gandini, R. U. di Torino; Scalabrini e Tonolo, R. U. di Pavia; Adolfo Vacchi R. U. di Bologna.

705. *Si consideri un'ellisse* E *ed un'iperbole equilatera* H *che ha per vertici i fuochi reali di* E. *Se* t, t′ *sono le tangenti condotte da un punto* P *di* H *alla* E *si dimostri che l'angolo di* t *coll'asse maggiore è uguale a quello di* t′ *coll'asse minore.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione geometrica del prof. Retali di Milano.

Denoto con T, T′ i punti di contatto di t, t'; con A, A′ le proiezioni di P sugli assi, con F ed F′ i fuochi dell'ellisse: poichè PF, PF′ *son parallele a due diametri coniugati di* H *e in ogni iperbole equilatera l'angolo di due diametri è eguale a quello dei coniugati,* abbiamo: $\angle$APF = A′PF′, ma, pel teorema di Poncelet, $\angle$TPF = F′PT′ dunque

$$\angle \mathrm{APT} = \mathrm{APF} - \mathrm{TPF} = \mathrm{A'PF'} - \mathrm{T'PF'} = \mathrm{A'PT'}.$$

Altrimenti: In ogni iperbole equilatera se FF′ è un diametro e P un punto arbitrario della curva, *le bisettrici degli angoli* FPF′ *sono parallele agli assintoti:* dunque coincidono con le bisettrici dell'angolo APA′ ecc. ecc.

Osservazione. — Le proprietà dell'iperbole equilatera, utilizzate in queste due soluzioni, sono molto note; veggasi p. es. l'ottimo libro del sig. Milinowski, *Elementar-Synthetische Geom. der Gleichseitigen Hyperbel*, pag. 20 *d)*, e pag. 6 *b)*.

Risoluzione analitica del prof. Cardoso di Savona.

L'equazione complessiva delle tangenti condotte da un punto $P \equiv (x_1, y_1)$ alla ellisse

$$f(x, y) = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

è

$$f(x, y) \cdot f(x_1, y_1) - (b^2xx_1 + a^2yy_1 - a^2b^2)^2 = 0. \tag{1}$$

Il punto P appartenendo all'iperbole equilatera H, che ha per equazione

$$x^2 - y^2 = a^2e^2,$$

nella quale e rappresenta l'eccentricità di E, possiamo porre

$$x_1 = ae \,.\, \sec\varphi, \qquad y_1 = ae \,.\, \mathrm{tg}\,\varphi,$$

ed allora la (1) diviene

$$(x^2+y^2)(a^2 \operatorname{sen}^2\varphi - b^2) - 2a^2e^2xy \operatorname{sen}\varphi +$$
$$+ 2ab^2ex\cos\varphi + 2a^3ey \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi - a^2e^2(a^3 \operatorname{sen}\varphi + b^2) = 0,$$

che si scinde nelle due seguenti

$$(\alpha\gamma + \beta\delta)\, x + (\alpha\gamma - \beta\delta)\, y + ae\sqrt{-1}\,(\beta\gamma - \alpha\delta) = 0, \tag{2}$$
$$(\alpha\gamma - \beta\delta)\, x + (\alpha\gamma + \beta\delta)\, y + ae\sqrt{-1}\,(\beta\gamma + \alpha\delta) = 0, \tag{3}$$

nelle quali si è posto

$$\alpha = \sqrt{2(\operatorname{sen}\varphi - 1)}, \qquad \beta = \sqrt{2(\operatorname{sen}\varphi + 1)};$$
$$\gamma = \sqrt{b^2 + a^2\operatorname{sen}\varphi}, \qquad \delta = \sqrt{b^2 - a^2\operatorname{sen}\varphi}.$$

la con l'asse y, si ha evidentemente

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\psi = -\frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\alpha\gamma - \beta\delta}. \qquad \text{c. d. d.}$$

Altre risoluzioni del dott. Niccolai e del sig. Scalabrini R. U. di Pavia; Adolfo Vacchi, R. U. di Bologna.

706. *Sia* F *un fuoco,* O *il centro ed* M *un punto variabile di un'ellisse e* P *la proiezione del centro* O *sulla perpendicolare da* M *alla* MF. *Trovare la curva luogo di* P, *e l'area della medesima.* E.-N. BARISIEN.

Risoluzione del prof. Retali di Milano.

Il luogo di P è la pedale, rispetto ad O, della pedale negativa dell'ellisse rispetto al fuoco F. Questa pedale negativa è una curva C_4^4 del quart'ordine e della quarta classe, avente la retta all'infinito per tangente doppia e le due rette isotrope uscenti da F per tangenti stazionarie. Ne segue che il luogo di P è una C_8^6 del sest'ordine, della classe ottava, bicircolare e avente un punto quadruplo isolato nell'origine O. Troviamone l'equazione: se OP incontra in A il cerchio descritto sul diametro $\overline{OF} = c$, si ha, dalla figura, OP = OA + FM, dunque, assumendo O per polo e OF per asse polare e usando le notazioni consuete,

$$\rho = c \,.\, \cos\omega + \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{1 + e\cos\omega},$$

che è l'equazione polare del luogo di P; passando alle coordinate rettangolari, si trova

$$a\,(x^2 + y^2 - cx)\left(ex + \sqrt{x^2 + y^2}\right) = b^2\,(x^2 + y^2).$$

Denotando con S l'area di C_8^6 e ponendo per brevità

$$\rho_1 = c \,.\, \cos\omega, \qquad \rho_2 = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{1 + e\cos\omega},$$

abbiamo

$$S = \int_0^\pi \rho^2\, d\omega = \int_0^\pi \rho_1^2\, d\omega + \int_0^\pi \rho_2^2\, d\omega + 2\int_0^\pi \rho_1\rho_2\, d\omega.$$

Il primo integrale, esprimendo il doppio dell'area del cerchio di diametro $\overline{OF}$, ha per valore $\frac{1}{2}\pi c^2$; il secondo è evidentemente eguale all'area πab dell'ellisse: basta dunque calcolare il terzo integrale

$$I = \frac{2\,cb^2}{a} \int_0^\pi \frac{\cos\omega}{1 + e\cos\omega} \,.\, d\omega.$$

Ricordando che

$$\int \frac{\cos\omega}{\alpha + \beta\cos\omega}\, d\omega = \frac{\omega}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} \int \frac{d\omega}{\alpha + \beta\cos\omega},$$

si trova

$$\int_0^\pi \frac{\cos\omega}{1 + e\cos\omega}\, d\omega = \frac{\pi}{e} - \frac{1}{e} \int_0^\pi \frac{d\omega}{1 + e\cos\omega} = \frac{\pi}{e} - \frac{1}{e} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{1 - e^2}},$$

dunque, avuto riguardo alle relazioni $c = ae$, $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$,

$$I = \frac{2\,cb^2}{a} \cdot \frac{\pi}{e}\left(1 - \frac{a}{b}\right) = 2\pi b\,(b - a)$$

e finalmente

$$2S = \pi c^2 + 2\pi ab + 4\pi b\,(b - a) = \pi\,(a - b)^2 + 2\pi b^2.$$

Altra risoluzione del sig. Scalabrini R. U. di Pavia.

essa condotte da un punto M del suo piano. Trovare il luogo dei punti M tali che

$$AF . AF' + BF . BF' + CF . CF' + DF . DF' = \text{costante}$$

E.-N. Barisien.

Risoluzione del prof. Retali di Milano.

Siano (ξ, η) le coordinate di M: le ascisse dei punti A, B, C, D sono le radici della equazione

$$c^4x^4 - 2a^2c^2\xi . x^3 + a^2(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 - c^4)x^2 + 2a^4c^2\xi . x - a^6\xi^2 = 0, \qquad (1)$$

che si ottiene eliminando y fra la equazione

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

dell'ellisse e quella dell'iperbole

$$a^2\xi . y - b^2\eta . x - c^2xy = 0;$$

ora, poichè

$$AF . AF' = a^2 - e^2x^2,$$

la somma che deve essere costante è

$$4a^2 - e^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2),$$

dove l'espressione in parentesi, somma dei quadrati delle radici della (1), ha il valore

$$s_2 = \frac{a_1^2 - 2a_0a_2}{a_0^2} = \frac{2a^2}{c^4}(a^2\xi^2 - b^2\eta + c^4).$$

Se dunque denotiamo con k^2 la costante, abbiamo, per equazione del luogo di $M(\xi, \eta)$,

$$2(a^2\xi^2 - b^2\eta^2 + c^4) = c^2(4a^2 - k^2):$$

il luogo è dunque una conica ecc.

QUISTIONI PROPOSTE

712. Essendo c un circolo tangente a due rette fisse x, y, ed r una tangente variabile di c, trovare l'inviluppo del circolo circoscritto al trilatero x, y, r. E.-N. Barisien.

713. Dati un piano α, una sfera $S^{(2)}$ ed una superficie qualunque Σ, da ogni punto di quest'ultima come centro si descrive una sfera $P^{(2)}$ tangente al piano:

Dimostrare, che il luogo dei centri di similitudine delle sfere $S^{(2)}$ e $P^{(2)}$ si compone di due superficie omologiche a Σ. Determinare il centro, il piano e le due caratteristiche d'omologia.

714. Il luogo dei centri dei cerchi tangenti a una curva piana Γ e che passano per un punto fisso O del suo piano è una curva omotetica alla prima pedale negativa di Γ rispetto ad O. Il centro di omotetia è O, il rapporto è $\frac{1}{2}$.

ai docenti ed ai discenti i professori Appell, membro dell'Istituto, e Chappuis della Scuola Centrale. L'unione di un matematico con un fisico, nella compilazione di queste lezioni di Meccanica elementare, è stata utilissima; giacchè in questo modo il lavoro risponde più completamente allo scopo pel quale è stato scritto. In tutta l'opera si riscontra una gran chiarezza di esposizione unita al necessario rigore, e ciò la rende doppiamente pregevole: ogni capitolo termina poi con degli esercizii bene scelti, di modo che anche per questa parte l'opera è commendevole.

Cours de Mécanique à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales, par P. APPELL, *Membre de l'Institut, Professeur à l'École Centrale,* deuxième édition, entièrement refondue. - Paris, Gauthier-Villars, 1905. Un vol. in-8 de 495 pages, avec 186 figures.

È un corso di Meccanica per uso degli allievi della classe di matematiche speciali, pubblicato dal medesimo prof. Appell. In esso, dopo alcune nozioni preliminari sulle grandezze geometriche, l'Appell tratta della cinematica del punto, per poi passare ai movimenti elementari dei sistemi invariabili, corredando ogni teoria con svariati esercizii che servono a meglio chiarirla.

Nella seconda parte del corso l'Appell si occupa del punto materiale tanto libero che vincolato, ed espone finalmente nella terza ed ultima parte la teoria dei momenti, le condizioni di equilibrio di un punto e di un sistema, ponendo poi termine all'opera con la statica dei corpi solidi e con un breve capitolo sulle macchine, nel quale applica le nozioni del lavoro alle condizioni del loro equilibrio quando si fa astrazione dall'attrito. Anche i diversi capitoli della seconda e terza parte del corso sono illustrati con opportuni esercizii, e tutta l'opera si raccomanda, come la precedente, per l'esattezza del linguaggio e per la chiarezza dell'esposizione. A. B.

AMODEO. — *Lezioni di geometria proiettiva dettate nella R. Università di Napoli.* 3ª edizione (1ª ed. tipografica), migliorata e aumentata con 420 fig. intercalate nel testo e molti eserc. Napoli, Pierro, 1905.

Da oltre venti anni il prof. Amodeo fa all'Università di Napoli un corso di Geometria proiettiva che, due volte litografato nel 1896 e nel 1902, viene ora presentato nella sua forma definitiva in bellissima veste tipografica dall'editore Pierro.

L'opera si compone di una introduzione nella quale sono stabiliti i postulati fondamentali per la generazione degli spazi e le altre nozioni fondamentali, e di due parti, nella prima delle quali sono studiate le forme lineari di 1ª, 2ª e 3ª specie, e nella seconda le forme di secondo ordine ad una dimensione.

Il sistema di postulati scelto dall'autore è sostanzialmente quello stesso che egli propose nel 1891 per un S_n negli Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino; lasciando perfettamente indeterminato il concetto di punto, esso permette di costituire immediatamente una geometria astratta applicabile a qualsiasi ente, e quindi il principio di dualità apparisce perfettamente chiaro ed evidente fin dal principio.

Gli altri concetti direttivi dell'opera sono espressi dall'autore nella prefazione colle parole seguenti:

" Sulla proposizione fondamentale di Desargues si discute se e quando si debba " considerare come postulato.

" Il *gruppo armonico* e le *proiettività* sono definite secondo lo Staudt.

" Le *involuzioni* sono considerate come casi particolari delle *proiettività cicliche.*

" Gli *elementi imaginari* sono considerati come elementi uniti *positivi* di una " omografia binaria e specialmente di un'omografia ciclica di terzo ordine; e per " avere adottata la separazione degli imaginari si può dire che un'involuzione è " trasformata in sè stessa da ogni involuzione armonica ad essa, ma deve dirsi che " è trasformata nella sua inversa.

" Le coniche sono generate mediante forme proiettive di 1ª specie, ma con" temporaneamente ne sono mostrate tutte le altre genesi, sezioni del cono qua" drico, curve fondamentali di una proiettività, proiezione di una circonferenza ecc.

" generazione per forme proiettive sono però trattate separatamente da quelle
" dipendenti dalla polarità, prima per elementi reali, poi per elementi imaginari.

" In un ultimo capitolo si tratta delle proiettività di secondo ordine e delle " loro applicazioni alla risoluzione dei problemi di secondo e terzo grado, e si fa " un cenno degli elementi comuni a due coniche e dei fasci e delle schiere di " coniche e dei loro centri.

" Tutta la trattazione del corso di Geometria pura è indipendente dalle cognizioni geometriche elementari, mentre di queste cognizioni si fa largo uso, quando " concetti e teorie sono applicate alla geometria proiettiva Euclidea.

" Lo studio particolare che in ogni capitolo si è fatto seguire per le proprietà " particolari nel campo Euclideo, ha assunto proporzioni anche più vaste quando " si è fatta la trattazione delle coniche, in modo da dare un discreto sviluppo ai " metodi di Poncelet e di Chasles. Così si è dato al § " *Centro e diametri* „, ed " all'altro *Fuochi e direttrici* uno sviluppo maggiore di quello ora usato nelle pub" blicazioni italiane „.

K.

Il 23 novembre 1905 è morto a Vienna l'illustre professore

OTTO STOLZ

membro dell'Accademia imperiale di Vienna.

Poco più di un mese prima, l'11 ottobre, egli mi annunziava per mezzo di una cartolina, scritta tutta di suo pugno, che per malattia si ritirava dall'insegnamento e dall'attività scientifica; ma non avrei creduto che la sua fine dovesse essere così prossima.

Nacque lo Stolz ad Hall (Tirolo) nel 1842; studiò a Vienna Matematica e Astronomia e nel 1867 divenne assistente all'osservatorio e libero docente; nel 1871 fu chiamato all'università d'Innsbruck, dove si è svolta tutta la sua carriera didattica e scientifica.

Lascia importanti lavori sull'aritmetica teorica, l'analisi e l'algebra superiore, tra i quali ricordiamo i seguenti trattati: *Vorlesungen über Algemeine Arithmetik* (2 volumi 1885-86). *Grundzüge der Differentialen Integralrecnung* (2 volumi 1893-96). *Theoretische Aritmetik* (in collaborazione con Gneimer) 2ª edizione 1902. *Einleitung in die Funktionen Theorie* (2 volumi 1904-05).

Alla memoria dell'illustre matematico, che ha onorato il " Periodico di matematica „ ed il " Supplemento „ della sua collaborazione, invio un caldo e reverente saluto.

G. Lazzeri.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 9 febbraio 1906

AMODEO. — *Gli istituti Accademici di Napoli intorno al 1800.* Memoria letta all'Acc. Pontaniana nelle tornate del 5 marzo e 5 novembre 1905. (Atti dell'Acc. Pontaniana, 1905.

ANDREINI. — *Sul modo di determinare approssimativamente le ore della notte mediante osservazioni a vista di stelle.* (Opinione geografica, 1905).

BONOLA. — *La Trigonometria assoluta secondo Giovanni Bolyai.* (« Rendiconti » del R. Ist. Lombardo di Sc. e Lett., 1905).

CARBONI. — *Notizie critico-storiche sul problema d'Apollonio.* Avezzano, Angelini, 1904.

D'AMICO. — *Sulla varietà quartica con tre piani semplici dello spazio a quattro dimensioni.* (Atti dell'Acc. Gioenia di sc. nat. in Catania, serie 4ª, vol. XVIII).

FINE. — *A College Algebra.* Ginn & Company, Boston, New York, Chicago, London, 1905.

LAISANT. — *Initiation mathématique.* Ouvrage étranger à tout programme, dédié aux amis de l'enfance. Avec 97 figures dans le texte. Généve, Kündig et fils, 1906.

VOLPI. — *Sopra un metodo speciale per trattare la teoria dei numeri irrazionali.* (Pitagora, 1905).

CONDIZIONI DI ABBONAMENTO

AL

PERIODICO DI MATEMATICA

	Italia	Estero
Periodico di matematica . . . . L.	8	9
Supplemento al Periodico di matematica . . . . „	2	2,50
Periodico e Supplemento . . . . „	9,50	11

Non si fanno altro che abbonamenti annui decorrenti dal 1° luglio al 30 giugno dell'anno successivo.

Per accordi presi col Presidente dell'Associazione " Mathesis „ i signori soci di quest'Associazione potranno avere l'abbonamento al *Periodico di Matematica* al prezzo di L. **6** (in aggiunta alla quota sociale, pure di L. 6), **pagato anticipatamente** al Segretario dell'Associazione, prof. **Gaetano Riboni**, *Via Vittoria 53, Milano.*

PERIODICO DI MATEMATICA

PER

L'INSEGNAMENTO SECONDARIO

fondato da DAVIDE BESSO, continuato da AURELIO LUGLI

ED ATTUALMENTE DIRETTO

DAL

PROF. GIULIO LAZZERI

SERIE III — VOLUME III

SOMMARIO:

LIVORNO

TIPOGRAFIA RAFFAELLO GIUSTI

1906

SEZIONI CONICHE

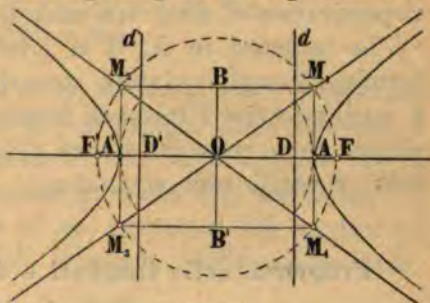
(Continuazione v. fasc. precedente)

Assintoti dell'iperbole

(Continuazione).

25. Problema. — *Dati i fuochi e l'asse principale di un'iperbole trovarne gli assintoti e le direttrici.*

Fig. 16.

Siano F, F′ (fig. 16) i fuochi dell'iperbole, e siano M_1, M_4 e M_2, M_3 i punti d'incontro del circolo di diametro FF′ colle perpendicolari ad AA′ in A ed A′. I triangoli OAM_1, $OA'M_2$, $OA'M_3$, OAM_4 sono rettangoli ed hanno l'ipotenusa eguale a c ed un cateto eguale ad a. Essi sono dunque eguali, e quindi OM_1 e OM_2 sono i prolungamenti di OM_3, OM_4, e per il teorema del § precedente M_1M_3, M_2M_4 sono gli assintoti dell'iperbole.

Descritto poi il circolo di diametro AA′, è facile vedere che esso incontra gli assintoti trovati in quattro punti, che congiunti convenientemente due a due danno due rette d, d' perpendicolari ad AA′; esse sono le direttrici.

Infatti, chiamando X il punto d'incontro di AA′ con la direttrice corrispondente al fuoco F e x la sua distanza da O si deve avere

$$\frac{AF}{XA} = e, \qquad \text{ossia} \qquad \frac{OF - OA}{OA - OX} = e,$$

ossia

$$\frac{c - a}{a - x} = \frac{c}{a}, \qquad \text{da cui} \qquad \frac{c}{a} = \frac{a}{x}.$$

Dunque x è la terza proporzionale dopo c ed a; e siccome si ha appunto per la costruzione indicata

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{\overline{OD}},$$

risulta che X coincide con D, ossia d è la direttrice.

Chiamando H_1 il punto d'incontro della semiretta OM_1 con d ossia col circolo di diametro AA', è evidente che i triangoli OAM_1, OH_1F sono eguali; perciò l'angolo $O\widehat{H_1}F$ è retto, e quindi la AH_1 è tangente al circolo suddetto in H_1.

26. Teorema. — *L'area del triangolo che ha per lati i due assintoti ed una tangente variabile di una iperbole è costante.*

Siano A, B due punti di una iperbole, A', B' i punti d'incontro con gli assintoti della retta A, B. È noto (§ 23, Teor.) che deve essere $A'A = BB'$, e perciò è facile vedere che i parallelogrammi, che hanno per lati gli assintoti e per un vertice A o B rispettivamente, sono equivalenti.

Le tangenti in A, B si trovano costruendo i segmenti che, terminando agli assintoti, sono divisi per metà da A o da B, ed è manifesto che i triangoli formati da questi segmenti con gli assintoti sono rispettivamente doppi dei due parallelogrammi suddetti, e perciò sono equivalenti.

Proprietà delle tangenti e delle normali delle coniche. Podarie dei fuochi.

27. Teorema. — *Le bisettrici degli angoli formati dalle rette che congiungono un punto* P *di una conica centrale coi due fuochi sono l'una tangente e l'altra normale in* P *alla conica. E precisamente la bisettrice che taglia il segmento avente per estremi i fuochi, nel caso dell'elisse è normale, nel caso dell'iperbole è tangente.*

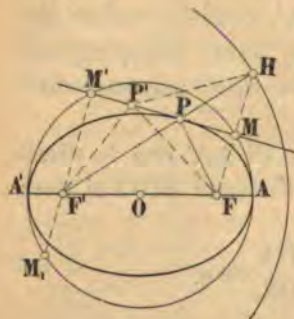



Fig. 17.

Siano F, F' i fuochi, AA' l'asse focale, P un punto qualunque di una conica centrale (fig. 17).

Sulla retta PF' si prenda il segmento $PH = PF$, dalla parte opposta di F' o dalla stessa parte, secondo che la conica è ellisse od iperbole. Otteniamo un triangolo PHF isoscele, nel quale la

bisettrice PM dell'angolo in P è anche mediana ad altezza; e per conseguenza la retta PM, perpendicolare ad FH nel suo punto di mezzo, è il luogo dei punti equidistanti da F e da H. Da ciò si ricava facilmente che un altro punto P' della retta PM non può appartenere alla curva.

Infatti, essendo P'F = P'H, nel caso dell'ellisse si ha

$$P'F' + P'F = P'F' + P'H > F'H$$

e quindi, essendo

$$F'H = F'P + PH = F'P + PF = 2a,$$

si trae

$$P'F + P'F' > 2a;$$

e nel caso dell'iperbole si ha (supposto P'F' > P'F)

$$P'F' - P'F = P'F' - P'H < F'H$$

ossia, essendo

$$F'H = F'P - PH = F'P - PF = 2a,$$
$$P'F' - P'F < 2a.$$

Se ne conclude che la retta PM ha il solo punto P in comune colla conica, e quindi (§ 7, Cor. 3° e 5°) si può affermare che è tangente alla curva, considerando anche che essa, supposto che la curva sia un'iperbole, non può essere parallela agli assintoti.

Infatti, se PM fosse parallela ad un assintoto, FM sarebbe ad esso perpendicolare, e quindi (§ 25) P sarebbe sull'assintoto medesimo; e ciò è assurdo.

L'altra bisettrice essendo perpendicolare alla PM risulta normale alla curva.

Corollari. — 1°. *Il luogo dei punti simmetrici di un fuoco di una conica centrale rispetto alle tangenti della medesima è il circolo che ha per centro l'altro fuoco e per raggio l'asse focale della conica.*

Infatti H (fig. 17) simmetrico di F rispetto alla tangente PM ha da F' una distanza $F'H = 2a$.

Definizione. — *I due circoli aventi per centri i fuochi* F, F' *ed i raggi eguali a* 2a *si chiamano* **circoli direttori** *della conica.*

28. Definizione. — *Si chiama* **podaria** *o* **pedale** *di un punto rispetto ad una curva il luogo dei punti d'incontro delle tangenti alla curva colle perpendicolari ad esse rispettivamente condotte dal punto stesso.*

Teorema. — *La podaria di ciascuno dei fuochi di una conica centrale è il circolo che ha per diametro l'asse focale.*

La retta PH dunque incontra la parabola soltanto in P, e siccome non può essere parallela all'asse risulta (§ 7, Cor. 4) che è tangente alla parabola.

Corollario. — *Il luogo dei punti simmetrici del fuoco della parabola rispetto alle tangenti ad essa è la direttrice della medesima.*

30. Teorema. — *La podaria del fuoco di una parabola rispetto alla parabola stessa è la tangente nel vertice.*

Se M (fig. 18) è il punto d'incontro della tangente PP' colla FH ad essa perpendicolare, abbiamo già visto che divide per metà FH (§ 29). Essendo A, vertice della parabola, punto di mezzo di FD, risulta che AM deve essere parallela a DH, ossia perpendicolare a FD, ossia tangente in A alla parabola.

Inversamente, se M è un punto della tangente nel vertice, H il punto d'incontro di FM colla direttrice *d*, P il punto d'incontro della perpendicolare in M alla FH colla perpendicolare in H alla direttrice, si dimostra facilmente che MP è tangente in P alla curva.

31. I teoremi precedenti permettono di costruire le tangenti di una conica, definita per mezzo dei suoi fuochi e dell'asse maggiore, senza bisogno di costruire la conica.

Problema 1°. — *Condurre la tangente in un punto* P *dato di una conica.*

Se la conica è centrale, basterà congiungere P coi fuochi F, F'. La bisettrice dell'angolo $F\widehat{P}F'$ se la conica è iperbole, o quella dell'angolo conseguente a $F\widehat{P}F'$, se la conica è ellisse, è la tangente richiesta (§ 27, Teor.).

Se la conica è una parabola si conduca da P la perpendicolare PH alla direttrice e il segmento PF, essendo F il fuoco. La bisettrice dell'angolo $H\widehat{P}F$ è la tangente richiesta (§ 29, Teor.).

Problema 2°. — *Condurre per un punto le tangenti ad una conica.*

1°. Siano F, F' i fuochi, AA' l'asse di un'ellisse o di un'iperbole, P un punto qualunque del piano (fig. 19 e 20).

Se PH è una delle tangenti richieste, M il piede della perpendicolare ad essa condotta dal fuoco F, il punto M deve trovarsi sul circolo di diametro AA' (§ 28, Teor.) e su quello di diametro FP, essendo $P\widehat{M}F$ retto.

Ciò premesso, apparisce chiaro che le tangenti richieste si possono trovare colle costruzioni seguenti.

Si costruisce il circolo di diametro AA' e quello di diametro FP, i quali potranno incontrarsi al più in due punti M, M'; le rette PM, PM' sono le rette richieste.

metro PF e cercando i punti d'incontro M, M', se esistono, colla parallela alla direttrice *d* condotta per V. Le rette PM, PM' sono le tangenti richieste. Se N, N' sono i punti d'incontro di *d* colle FM, FM', e H, H' i punti d'incontro delle rette PM, PM' colle parallele per N, N' all'asse, H, H' sono i punti di contatto delle tangenti suddette.

Infatti, essendo M il punto medio di FN e PM perpendicolare ad FN in M, si ha HF = HN; cioè H appartiene alla parabola; e HM è bisettrice dell'angolo $\widehat{FHN}$, cioè (§ 29) è tangente alla parabola.

Lo stesso dicasi della PM'.

Problema 3°. — *Tracciare le tangenti parallele ad una data direzione.*

1°. Se la conica è centrale (fig. 22 e 23), per un fuoco F

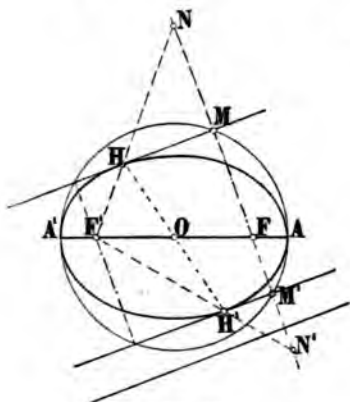
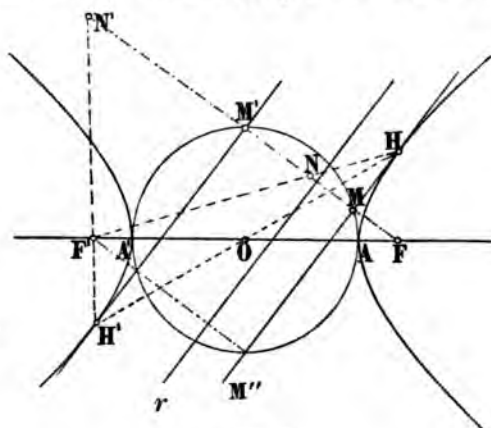
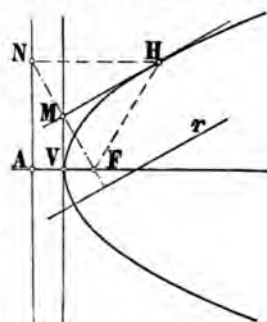



Fig. 22. Fig. 23.

si conduca la perpendicolare alla data retta *r*; se M, M' sono i punti d'incontro di quella retta col circolo di diametro AA' le rette condotte per M, M' parallele ad *r* sono le tangenti richieste. Se N, N' sono i simmetrici di F rispetto a quelle rette, le F'N, F'N' tagliano le medesime nei rispettivi punti di contatto.

Fig. 24.

2°. Se la curva è una parabola (fig. 24), si conduca per il fuoco F la perpendicolare alla data retta *r*, e siano M, N punti d'incontro di essa con la tangente nel vertice V con la direttrice. La parallela ad *r* condotta per M è la tangente richiesta, ed il suo punto di contatto è l'incontro della medesima colla parallela all'asse per N.

Ciò premesso, è chiaro che per trovare i punti d'incontro di una retta data r con la conica avente F, F' per fuochi e AA' per asse, basterà cercare i punti di questa retta, che sono centri di circoli passanti per F e tangenti a c.

Per risolvere questo problema si descriva un circolo c' che abbia il suo centro in un punto scelto arbitrariamente sulla r e che tagli c in due punti L, L'. La retta LL' è l'asse radicale dei circoli c, c', la perpendicolare ad r condotta per F, ossia la retta che congiunge F col suo simmetrico H rispetto ad r, è l'asse radicale di c' e del circolo che cerchiamo. Il punto d'incontro di questi assi radicali è il centro radicale di c, c' e del circolo incognito, perciò l'asse radicale di questo circolo è la tangente condotta dal punto suddetto al circolo c.

Se il centro radicale è esterno a c potremo condurre due tangenti ad esso, e le rette che uniscono i punti di contatto con F' tagliano r nei soli punti P, P' che soddisfano le condizioni del problema.

Se il centro radicale è su c si ha una sola soluzione, ossia r è tangente alla curva; se è esterno a c non si hanno soluzioni, cioè r è esterna alla conica.

2°. Sia F il fuoco (fig. 27), MM' la direttrice di una parabola, P un punto della curva; essendo P equidistante dal fuoco e dalla direttrice, il circolo che ha per centro P e passa per il fuoco è tangente alla direttrice.

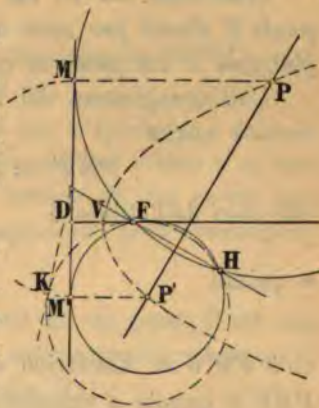



Fig. 27.

Ciò premesso, è chiaro che la ricerca dei punti d'incontro di una retta r con la parabola definita dal suo fuoco e dalla sua direttrice equivale all'altro di trovare i punti della r che sono centri di circoli passanti per F e tangenti alla direttrice.

Per risolvere questo problema si descriva un circolo arbitrario c', che abbia il centro sulla r, e passi per F (e quindi anche per il simmetrico H di F rispetto ad r).

Per il punto d'incontro D della retta FH colla direttrice, si conduca una tangente DK a c' e sulla direttrice si prenda, dalle due parti di D, DM e DM' eguali a DK; le perpendicolari alla direttrice in M ed M' incontrano la r nei punti cercati. Infatti, essendo $DM^2 = DM'^2 = DF \cdot DH$, i circoli che passano per F, H, M oppure per F, H, M' sono tangenti in M, M' alla direttrice. Se-

Ma d'altra parte essendo P

si ha pure

$$\overline{PF'}^2 + \overline{PF}^2 =$$

Confrontando queste eguagl

$$\overline{PO}^2 =$$

ossia nel caso dell'ellisse

$$\overline{PO}^2 = 2a^2 - (a$$

e nel caso dell'iperbole

$$\overline{PO}^2 = 2a^2 - ($$

3°. *Il segmento di tangente n bole compresa fra due tangenti ciascuno dei fuochi.*

Siano t_1, t_2 due tangenti fis in un punto variabile H e si con t_1, t_2 rispettivamente, e P

Nel caso dell'ellisse l'ango degli angoli $P_1\widehat{F}H$, $H\widehat{F}P_2$ che

$$H_1\widehat{F}$$

perciò l'angolo $P_1\widehat{F}P_2$ è la met è eguale agli angoli $H_1\widehat{F}P$ o I

Un ragionamento simile pu

4°. *Il segmento di una tange iperbole compreso fra le tangent sante per un fuoco (in particolar è visto sotto angolo retto da que*

34. Teorema. — *Le due tan parabola fanno angoli rispettivam col fuoco e colla parallela per*

Essendo PH, PH' le tangent rispettivi punti di contatto, N dotte da H, H' alla direttrice, M, colla tangente nel vertice, si sa un circolo e si ha $M'\widehat{P}F = M'$ avendo i lati rispettivamente $H'\widehat{P}F$ è eguale all'angolo NH la parallela per P all'asse.

Corollari. — 1°. *La retta rabola con un punto* P *divide*

che congiungono F coi punti di contatto delle tangenti condotte da P alla parabola.

L'angolo $\widehat{HFM}$ complementare di $\widehat{FHM}$, o di $\widehat{MHN}$ è uguale a $\widehat{PFM'}$ che è complementare di $\widehat{FPM'}$, e similmente $\widehat{H'FM'}$ è uguale a $\widehat{MFP}$; perciò essendo

$$\widehat{HFP} = \widehat{HFM} + \widehat{MFP}, \qquad \widehat{H'FP} = \widehat{M'FP} + \widehat{H'FM'},$$

risulta

$$\widehat{HFP} = \widehat{PFH'}.$$

2°. *Il luogo dei vertici degli angoli retti i cui lati sono tangenti ad una parabola è la direttrice.*

Se l'angolo $\widehat{HPH'}$ è retto, essendo pure retti gli angoli $\widehat{FMP}$, $\widehat{FM'P}$, il quadrangolo FMPF' deve essere un rettangolo; il suo centro deve essere sulla MM' ed il vertice P deve essere dalla parte opposta di F ed avere da MM' una distanza eguale a quella di F, cioè deve trovarsi sulla direttrice.

3°. *Il segmento di una tangente mobile ad una parabola compreso fra due tangenti fisse è visto dal fuoco sotto un angolo costante eguale all'angolo delle tangenti fisse.*

4°. *Il segmento di una tangente variabile ad una parabola compreso fra due tangenti fisse negli estremi di una corda passante per il fuoco, è vista sotto un angolo retto dal fuoco.*

Alcune proprietà particolari dell'ellisse.

35. Nel § 14 abbiamo visto che ogni conica si può in infiniti modi riguardare come sezione piana di un cono rotondo; il luogo dei vertici di questi coni è la conica focale di quella data.

In particolare, essendo data una ellisse, la sua conica focale è una iperbole, e immaginando che un punto vada a distanza infinita su questa, il cono proiettante ha per limite il cilindro proiettante la data ellisse, e che ha le generatrici parallele all'uno o all'altro degli assintoti della iperbole.

Se dunque per il centro O dell'ellisse si conduce un piano perpendicolare ad un assintoto dell'iperbole focale, esso piano taglia il cilindro colle generatrici parallele all'assintoto stesso secondo un circolo che può considerarsi come proiezione ortogonale della data ellisse.

Siccome segmenti eguali e paralleli hanno sopra un piano qualunque proiezioni eguali e parallele, segue che due diametri co-

niugati dell'ellisse hanno per proiezioni due diametri coniugati dal circolo cioè due diametri perpendicolari di questo.

Ne segue che il diametro comune all'ellisse e al circolo è l'asse minore dell'ellisse perchè divide per metà tutte le corde ad esso perpendicolari.

Sia AA′ (fig. 28) quest'asse minore, B_1B_1' l'asse maggiore, PM_1

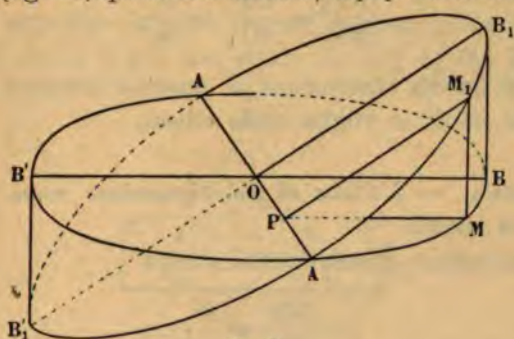



Fig. 28.

una semiretta parallela ad OB_1, e OB, PM le proiezioni di OB_1' e PM_1.

Dai triangoli simili PMM_1, OBB_1 si deduce

$$\frac{PM}{PM_1} = \frac{b}{a}.$$

Se immaginiamo ribaltato il piano della ellisse su quello del circolo, questa proporzione rimane conservata, e si deduce la se-

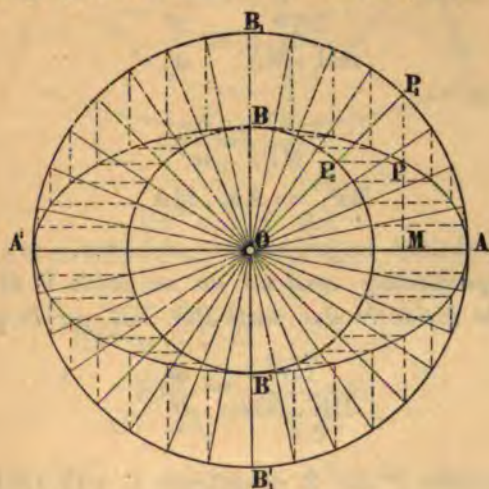



Fig. 29.

guente costruzione per punti della ellisse, dati gli assi della medesima (fig. 29).

Teorema 1°. — *Se* P *è un punto di un'ellisse o di un'iperbole, della quale* A, A′ *sono i vertici,* H *la proiezione di* P *sull'asse principale, si ha*

$$\frac{\overline{\mathrm{PH}}^2}{\mathrm{AH}\,.\,\mathrm{HA'}}=\frac{a^2-c^2}{a^2}.$$

Per i punti P, A, A′ si conducano tre piani perpendicolari all'asse della superficie conica, i quali taglino le generatrici r, r' contenute nel piano VAA′ nei punti K, K′; A, M; L, A′.

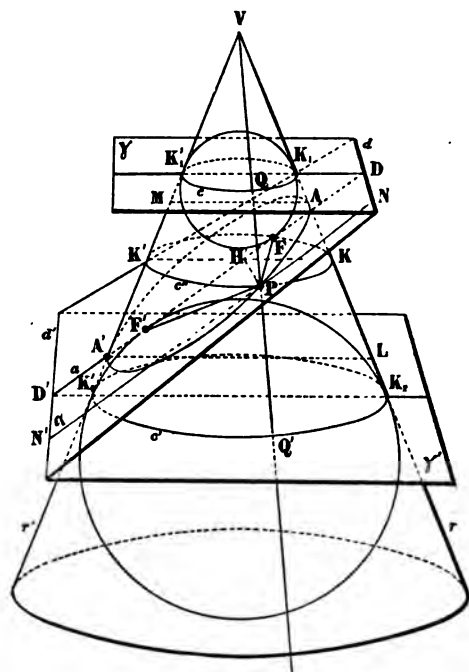



Fig. 30.

Si ha

$$\overline{\mathrm{HP}}^2=\mathrm{KH}\,.\,\mathrm{HK'}$$

$$\mathrm{KH}:\mathrm{AH}=\mathrm{LA'}:\mathrm{AA'},\qquad \mathrm{HK'}:\mathrm{HA'}=\mathrm{AM}:\mathrm{AA'}.$$

Perciò

$$\overline{\mathrm{HP}}^2=\frac{\mathrm{AH}\,.\,\mathrm{HA'}\,.\,\mathrm{LA'}\,.\,\mathrm{AM}}{\mathrm{AA'}^2},$$

$$\frac{\overline{\mathrm{HP}}^2}{\mathrm{AH}\,.\,\mathrm{HA'}}=\frac{\mathrm{LA'}\,.\,\mathrm{AM}}{\mathrm{AA'}^2}. \tag{1}$$

Nel triangolo AA′L è $\mathrm{AA'}=2a$, $\mathrm{AL}=2c$. Da esso, ponendo $\mathrm{A'L}=2\delta$, $\mathrm{AM}=2\delta'$ ed osservando che la proiezione di AL su A′L è $(\delta-\delta')$, si ricava

$$\overline{\mathrm{AA'}}^2=\overline{\mathrm{AL}}^2+\overline{\mathrm{A'L}}^2-2\,\mathrm{A'L}(\delta-\delta'),$$

ovvero

$$4a^2 = 4c^2 + 4\delta^2 - 4\delta(\delta - \delta'), \quad a^2 = c^2 + \delta\delta', \quad \delta\delta' = (a^2 - c^2).$$

Perciò dalla (1) si deduce

$$\frac{\overline{HP}^2}{AH \, . \, HA'} = \frac{a^2 - c^2}{a^2}.$$

Teorema 2°. — *Se* p *è la misura della distanza dal fuoco di una parabola della direttrice,* P *un punto qualunque della curva,* H *la proiezione di* P *sull'asse della medesima,* A *il vertice, si ha*

$$\frac{\overline{PH}^2}{AH} = 2p.$$

Essendo r la generatrice del cono che passa per A ed r' la sua simmetrica rispetto all'asse, siano K, K' i punti d'incontro di r, r' col piano condotto per P perpendicolare all'asse del cono, e B il simmetrico del vertice A rispetto all'asse. Si ha

$$\overline{PH}^2 = KH \, . \, HK'$$

$$HK' = AB, \qquad HK : AH = 2AF : \tfrac{1}{2} AB$$

ossia

$$HK : AH = p : \tfrac{1}{2} AB,$$

$$HK = \frac{2p}{AB} \, . \, AH, \qquad HK \, . \, HK' = 2p \, . \, AH$$

e quindi

$$\frac{\overline{PH}^2}{AH} = 2p.$$

38. La considerazione del circolo proiezione ortogonale dell'ellisse permette di risolvere con molta facilità vari problemi, come costruzioni di tangenti, ricerca dei punti d'incontro con una retta ecc. relativamente ad un'ellisse individuata dai suoi assi e non disegnata.

Per esempio, volendo tracciare le tangenti che passano da un punto Q_1 basterà cercare la proiezione Q di Q_1, condurre da Q le tangenti al circolo e poi cercare le rette di cui queste sono proiezioni; tutto ciò può farsi con costruzioni piane per mezzo del ribaltamento.

Agli stessi risultati si può giungere considerando il circolo di cui l'ellisse data è proiezione.

39. Teorema 3°. — *Se una retta* r *si muove in modo che due suoi punti* M, N *scorrano su due rette ortogonali* x, y, *ogni punto* P *della* r *percorre un'ellisse.*

Condotta per O, punto d'incontro delle x, y, la parallela ad x e per P la parallela ad y, essendo P' il punto d'incontro di queste rette, si ha OP' = NP, ossia il luogo di P' è un circolo. Inoltre, essendo H il punto d'incontro di PP' con x, si ha

$$HP : HP' = b : a,$$

quindi il luogo di P è l'ellisse di semiassi a, b sulle x, y.

Corollari. — 1°. *Se* OCM *è un triangolo isoscele, di cui il punto* O *è fisso ed è costante la lunghezza dei lati eguali, mentre il punto* M *si muove sulla retta* x, *il luogo di un punto* P *del lato* PM *è un'ellisse, di cui* x *è l'asse principale, essendo* a = OC + CP *e* b = OC — CP = PM *le lunghezze dei due semiassi.*

Infatti se N è il punto d'incontro della retta CM colla y perpendicolare in O alla x, è facile vedere che, essendo CM = CO, è pure CO = CN, e quindi MN è un segmento di lunghezza costante i coni estremi scorrono sulle rette ortogonali x, y; perciò il luogo di P è l'ellisse del corollario precedente.

2°. *Se un triangolo* ABC *di forma invariabile si sposta in modo che due vertici* A, B *percorrano due rette* x, y, *il terzo vertice percorre un'ellisse.*

Infatti il circolo circoscritto ad OAB, essendo AB e $\widehat{AOB}$ costanti è di diametro costante. Se tale circolo s'imagina collegato con il triangolo e mobile con esso, il diametro MN che passa per C ha i suoi estremi su due rette fisse Ox_1, Oy_1 perchè gli archi AM, BN e quindi gli angoli AOx_1, BOy_1 sono costanti. Dunque C descrive la linea che si ottiene facendo scorrere M, N sulle x_1, y_1.

40. È manifesto che il teorema precedente ed il corollario primo dànno le tre costruzioni seguenti di un'ellisse della quale sono noti gli assi in grandezza e posizione.

1°. Si prenda un segmento $MN = a + b$ diviso da un punto P in due parti $MP = b$, $PN = a$.

Facendo scorrere questo segmento in modo che M, N percorrono due rette ortogonali x, y, il punto P descrive l'ellisse richiesta.

2°. Si prenda un segmento $M_1N_1 = a - b$ e sul suo prolungamento (dalla parte di M_1) un punto P tale che sia $M_1P = b$ e quindi $N_1P = a$.

Facendo scorrere il segmento in modo che M_1, N_1 percorrano le rette ortogonali x, y, il punto P descrive l'ellisse cercata.

3°. S'imaginino due aste OC, CM eguali articolate attorno ad O e C. Se M percorre una retta x per O, un punto P di CM descrive

D'altra parte, essendo KC = CH, si ha

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{MK}^2 + \overline{MH}^2 = (MC + CK)^2 + \\ + (MC - CK)^2 = 2\,\overline{MC}^2 + 2\,\overline{CK}^2$$

e siccome $\overline{OC}^2 = \overline{CK}^2$, risulta

$$\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2.$$

2°. *L'area del triangolo che ha per lati due semidiametri coniugati è costante ed eguale all'area del triangolo rettangolo che ha per lati i due semiassi.*

Considerando le due secanti MK, MP del circolo di diametro OP, si ha

$$\overline{MP \,.\, MQ} = \overline{MK \,.\, MH},$$

ovvero

$$\overline{ON' \,.\, MQ} = \overline{OA \cdot OB}.$$

Dunque (essendo MQ l'altezza del triangolo OMN') i triangoli OMN', OAB sono equivalenti.

3°. *L'area del parallelogrammo che ha per diagonali due diametri coniugati di un'ellisse è costante ed eguale a quella della losanga che ha per diagonali gli assi.*

Infatti il parallelogrammo MNM'N' e la losanga ABA'B' sono rispettivamente quadrupli dei triangoli OMN', OAB, equivalenti.

4°. *L'area del parallelogrammo che ha per mediane due diametri coniugati di un'ellisse è costante ed eguale a quella del rettangolo che ha per mediane gli assi.*

Infatti, il parallelogrammo che ha per mediane MM', NN' ed il rettangolo che ha per mediane AA', BB', essendo rispettivamente doppi dei parallelogrammi equivalenti MNM'N' e ABA'B', sono pure equivalenti.

42. Le proprietà dimostrate nel § precedente possono essere estese con opportune modificazioni anche all'iperbole, purchè si stabilisca per mezzo di una definizione il concetto di *lunghezza* di un diametro, anche se questo non incontra la curva.

Ciò può farsi per mezzo delle seguenti considerazioni. Se un diametro d_1 di un'iperbole taglia la curva in due punti A, A', le tangenti in A, A' sono parallele al diametro d_2, coniugato a d_1, ed i segmenti di esse limitati fra gli assintoti sono uguali e divisi per metà da A, A' respettivamente; perciò i segmenti congiungenti gli estremi di questi segmenti sono paralleli ed eguali ad AA'. Se B, B' sono i punti di mezzo di questi lati, si dirà che BB' è la lunghezza del diametro coniugato ad AA'. In altre parole si stabilisca la seguente

SULL'USO E SULLE TAVOLE DEI VALORI NATURALI DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Introduzione.

1. Fino a pochi anni fa, per i calcoli trigonometrici, era esclusivamente indicato l'uso dei logaritmi: veggansi, per es., i trattati del LE COINTE (1), del SERRET (2), del BOURDON (3),...; veggasi pure la classica raccolta del REIDT (4), dove, fra tanti esempî numerici, non se ne trova neppure uno (neanche fra i più semplici) nel quale si accenni alla possibilità di procedere senza logaritmi; e veggasi anche il trattato del GOODWIN (5), dove si ricorre ai logaritmi anche per risolvere un triangolo rettangolo avente per cateti $b=0{,}02$ e $c=0{,}10$.

E non era, generalmente, possibile fare diversamente, perchè le ordinarie raccolte di tavole logaritmo-trigonometriche non contenevano nessuna tavola di valori naturali (6); per cui, se in qualche caso (come, per es., nella risoluzione di qualche equazione trigonometrica) si presentavano questi valori, bisognava fare il passaggio ai corrispondenti logaritmi; veggasi, per es., il trattato del KLEYER (7).

2. Nei trattati più recenti però l'esclusione dei valori naturali non è più assoluta, giacchè, invece di dire che i calcoli trigonometrici si fanno coi logaritmi *sempre*, si dice *generalmente*: veggansi, per es., i trattati del VACQUANT (8), del BROCKMAN (9), dell' HAMMER (10), dello CHAUVENET (11),...; veg-

---

(1) LE COINTE. *Leçons sur la Théorie des fonctions circulaires.* (Ed. Mallet-Bachelier, Paris 1858, pag. 87.)

(2) SERRET. *Traité de Trigonométrie.* (Ed. Gauthier-Willars, Paris 1888, pag. 66.)

(3) BOURDON. *Trigonométrie rectiligne et spherique.* (Ed. Gauthier-Willars, Paris 1877, pag. 47.)

(4) REIDT. *Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie.* (Ed. Teubner, Leipzig 1877.)

(5) GOODWIN. *Plane and spherical trigonometry.* (Ed. Longmans, London 1891, pag. 188); trattato autorevolissimo, che da molti anni è libro di testo nel *Royal Naval College* di *Greenwich.*

(6) Le prime tavole logaritmo-trigonometriche complete furono quelle del VLACQ (*Arithmetica logarithmica*, Gouda 1628, e *Trigonometria artificialis*, Gouda 1633); in esse si trovano i valori naturali di seno, secante e tangente, e i logaritmi del seno e della tangente, con dieci cifre decimali e di 10″ in 10″. Di queste tavole il VLACQ stesso pubblicò poi un estratto con sette cifre e di 1′ in 1′ (*Tables de sinus, tangentes, secantes: et de logarithmes des sinus, tangentes,* La Haye 1651), del quale furono fatte molte edizioni. Ne abbiamo sotto gli occhi una, la quale è identica alla precedente, anche in tutta la introduzione; ma, invece del nome di VLACQ, porta quello di OZANNAM (l'autore delle *Récréations mathématiques et phisique*), e non vi è detto nè dove nè quando sia stata pubblicata (crediamo a Parigi nel 1685).

Dalle grandi tavole del VLACQ ricavarono poi il GARDINER le sue tavole a sette cifre e di 10″ in 10″ (*Tables of logarithms*, London 1842, o *Tables de logarithmes,* Avignon 1770) e il VEGA le sue grandi tavole a dieci cifre e di 10″ in 10″ (*Thesaurus logarithmorum completus*, Leipzig 1794); ma nessuna di queste nuove tavole contenne più i valori naturali, come non li contenne più nessuna delle numerosissime che vennero dopo (CALLET, LALANDE, BREMIKER, KÖKLER, BRUHNS, SCHRÖN,...)

(7) KLEYER. *Lehrbuch der Goniometrie.* (Ed. MAIER, Stuttgart 1886, pagg. 232, 233, 235, 248,...)

(8) VACQUANT. *Cours de Trigonomerie.* (Ed. Masson, Paris 1894, Vol. I, pag. 96.)

(9) BROCKMANN. *Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie.* (Ed. Teubner, Leipzig 1880, pag. 30.)

(10) HAMMER. *Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie.* (Ed. Metzler, Stuttgart 1885, pag. 34.)

(11) CHAUVENET. *A traetise on plane and spherical Trigonometry,* (Ed. Lippincott, Filadelfia 1891, pag. 44.)

temente, non si risparmia nessuna ricerca (nè diretta, nè inversa). Però nella risoluzione di un triangolo sferico obliquangolo, quell'uso può essere opportuno per evitare, come si è accennato, l'uso di elementi ausiliarî [1]. E questo, in pratica, accade principalmente nel caso in cui son dati due lati (b, c) e l'angolo compreso (α); chè, volendosi solo l'angolo β, o solo il lato a, l'uso di una delle due formule

$$\operatorname{ctn} \beta = \operatorname{ctn} b \operatorname{sen} c \csc \alpha - \cos c \operatorname{ctn} \alpha, \tag{2}$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos \alpha, \tag{3}$$

può essere molto opportuno, anche se si richiede l'approssimazione di 1′. Come, per es., accade, per la prima, quando si vuol calcolare la rotta iniziale di una navigazione per circolo massimo (nel qual caso anzi, invece della approssimazione di 1′, è più che sufficiente l'approssimazione di un decimo di grado); e per la seconda in un problema di *Navigazione* [2], alla cui risoluzione, da qualche tempo, si ricorre frequentissimamente, trasformando la (3) stessa, mediante prostaferisi [3] nell'altra, più facile al calcolo,

$$\cos a = \tfrac{1}{2} \left[\{\cos (b - c) + \cos (b + c)\} + \{\cos (b - c) - \cos (b + c)\} \cos \alpha \right]. \tag{3$'$}$$

4. Dietro queste considerazioni ci è parso utile estendere ai valori naturali delle funzioni trigonometriche lo studio che già facemmo pei logaritmi dei numeri e pei logaritmi trigonometrici [4]; e così avremo occasione di modificare opportunamente e di completare alcuni risultati già altra volta da noi ottenuti [5].

Considereremo le tre funzioni seno, tangente, secante [6] e non le prime due soltanto [7], perchè una tavola, che non contenga la secante, non permette la notevole semplificazione, che spesso si può ottenere nei calcoli ordinarî, sostituendo ad ogni divisione la corrispondente moltiplicazione.

Così, per es., se dalla (1) si vuole ricavare a, sarà certo più opportuna al calcolo la formula

$$a = b \csc \beta,$$

che la formula

$$a = b : \operatorname{sen} \beta\,;$$

---

(1) “ Malgré leur apparente simplicité, les formules que l'on obtient en recourant aux angles “ auxiliaires, et même la plupart de celles qui résultent de la trasformation des expressions, ne “ sont pas souvent le plus aisément calculables par logarithmes. Sans parler du travail que de“ mande la trasformation, le nombre des lectures à faire dans la table rend ordinairement les “ recherches assez laborieuses. Ces trasformations sont, à la verité, d'utiles exercices, souvent “ imposés dans les examens; mais, au point de vue pratique, elles présentent souvent plus d'in“ convénientes que d'avantages (Houel, *Journal de Matématiques élémentaires et spéciales*, tomo II, “ pag. 478) „.

(2) Chi nei calcoli nautici propose l'uso dei valori naturali fu l'Ammiraglio Magnaghi (*Tavole e Formule nautiche*, Ed. Hoepli, Milano 1883); ci sia però permesso il dire che nella esclusione dei logaritmi egli ha qualche volta esagerato (come già dicemmo del Besso), perchè non crediamo, per es., che la sua tavola di valori naturali a cinque cifre e di 10′ in 10′ possa servire anche nel calcolo delle distanze lunari, dove, in certi casi, possono occorrere tavole logaritmiche di 10″ in 10″ e con sette cifre (Faye, *Cours d'Astronomie nautique*, Ed. Gauthier-Villars, Parigi 1880, pag. 29).

(3) V. il nostro studio: *Sul calcolo relativo alle rette d'altezza secondo il metodo di Marcq Saint-Hilaire* (“ Rivista Marittima „, Gennaio 1903 e Aprile 1904).

(4) *Sulle operazioni fra numeri decimati approssimati...* (“ Periodico di Matematica „, 1904, fasc. VI e 1905 fasc. I e II): Cap. III e IV. I §§ di questa nota, che dovremo citare in seguito, saranno, semplicemente, precedenti da una N.

(5) *Errori prodotti dall' interpolazione semplice...* (“ Rivista Marittima „, 1895 Luglio); §§ 6 e 7.

(6) Come nelle tavole dell' Houel e dell'Albrecht, già citate.

(7) Come nella tavola (pure già citata) pubblicata dal Claudel, che, fra le moderne, è la più nota e la più estesa.

In seguito indicheremo con g_d e g_i i valori assoluti di γ_d e di γ_i, e con G_d e con G_i i limiti superiori che per questi valori si ricaveranno dalla (5) e dalla (7). E, almeno nei casi che considereremo, questi limiti saranno molto minori di quelli che si otterrebbero, ricorrendo (come, per ciò, si fa ordinariamente) alla serie di TAYLOR.

6. Se i valori di $f(x_0)$ e di $f(x_0 + \Delta x)$, che supponiamo dati da una tavola, fossero esatti, il valore di $f(x)$, nella ricerca diretta, e il valore di x, nella ricerca inversa, risulterebbero affetti solo dagli errori γ_d e γ_i rispettivamente.

Ma i valori tavolari di $f(x_0)$ e di $f(x_0 + \Delta x)$ hanno sempre un limitato numero n di cifre decimali, e quindi sono generalmente affetti da un errore d'*arrotondamento*, che, in valore assoluto, ha per massimo una mezza unità dell'ultimo ordine; e altrettanto si deve dire di $f(x)$, perchè questo valore è generalmente limitato allo stesso numero di cifre dei due valori precedenti. Quindi, oltre l'errore γ, nei valori ricavati dalla tavola colla interpolazione semplice, si avrà un altro errore, che indicheremo con λ.

Attribuendo a λ_d, λ_i, l_d, l_i, L_d, L_i significati analoghi a quelli attribuiti nel § prec., a simboli analoghi, sappiamo già [1] che si ha

$$L_d = 1 \qquad (8) \qquad\qquad L_i = \frac{\Delta x}{\Delta y}; \qquad (9)$$

dove Δy indica, in valore assoluto, la differenza tavolare, ossia la differenza che si deduce dai valori arrotondati che si trovano nella tavola, e non la differenza esatta fra i valori esatti di $f(x_0 + \Delta x)$ e di $f(x_0)$; dove per cifra delle unità di L_d e di Δy si prende l'ultima cifra decimale che si considera; dove L_i risulta espresso nelle stesse unità in cui è espresso Δx.

E si rammenti bene che L_d è il *massimo* di l_d, mentre che L_i è di l_i un *limite superiore inabbassabile*.

OSSERVAZIONE I. — Il valore (assoluto) di Δy differisce dalla differenza esatta $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ meno di una unità, perchè l'errore di ogni valore arrotondato ha per massimo una mezza unità se è per eccesso, ed ha invece per *limite superiore* una mezza unità se è per difetto (N. § 14, Oss.); si ha dunque certamente

$$\Delta y - 1 < | f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) | < \Delta y + 1 \qquad (10)$$

e questi limiti sono inabbassabili.

OSSERVAZIONE II. — Ricordiamo che l'errore λ_d consta di due parti, ognuna delle quali ha per massimo una mezza unità: una è costituita dall'errore di arrotondamento di $f(x)$ e l'altra da quello che deriva dagli errori di arrotondamento di $f(x_0 + \Delta x)$ e di $f(x)$.

OSSERVAZIONE III. — Ricordiamo pure che, nella ricerca inversa, essendo il valore di $f(x)$ il risultato di un calcolo, non sarà, generalmente, affetto solo dall'errore di arrotondamento, ma anche da un altro errore dovuto agli errori dei numeri sui quali si è operato (N. § 58); e che, indicando con a

---

[1] V. il § 3 della nota già citata: *Sulla ricerca del logaritmo seno...* e il § 6 dell'altra nostra nota: *Sopra uno degli errori prodotti dalla interpolazione semplice* ("Periodico di Matematica", 1902 fasc. I). Avvertiamo che alcuni simboli sono stati opportunamente modificati, od opportunamente introdotti.

un limite superiore del valore assoluto di questo errore (escluso l'accennato errore di arrotondamento) si ha certamente

$$l_i < (1 + a)\frac{\Delta x}{\Delta y}\,. \tag{11}$$

Osservazione IV. — Ricordiamo finalmente l'apparente paradosso [1] che, se, invece della differenza tavolare Δy, per la differenza $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ si piglia un valore più appprossimato, l'errore λ_d, invece di diminuire, può crescere.

E un altro apparente paradosso vogliamo far rilevare ora relativo all'errore λ_i; ed è che, diminuendo Δx, il limite superiore inabbassabile L_i di questo errore può crescere anzichè diminuire. Così, per es., essendo

Lsen 39° 25′ 00″ = $\overline{1}$,80274	Lsen 39° 25′ 40″ = $\overline{1}$,80285
Lsen 39 26 00 = $\overline{1}$,80290	Lsen 39 25 50 = $\overline{1}$,80287,

dato Lsen $x = 1{,}80286$, secondo che nella ricerca di x si piglia $\Delta x = 60''$ o $\Delta x = 10''$, L_i ha per valore

$$\frac{60''}{16} = 3'',75\,, \quad \text{o} \quad \frac{50''}{2} = 5'',00\,,$$

rispettivamente.

7. Affinchè dunque nell'uso di una determinata tavola numerica si possa ammettere il principio delle parti proporzionali bisogna che si possa ritenere trascurabili la somma dei due errori γ e λ.

Nella ricerca diretta l'errore λ_d non dipende nè dalla forma della funzione $f(x)$, nè dalla grandezza del passo Δx, ma solo dal numero n delle cifre decimali date dalla tavola; l'errore γ_d invece dipende dalla forma di $f(x)$, del passo Δx e non dipende affatto da n. Nella costruzione e nell'uso delle ordinarie tavole logaritmo-trigonometriche si ammette generalmente che γ_d sia trascurabile, quando il minimo limite superiore che se ne conosce non supera in valore assoluto una mezza unità dell'ultimo ordine, ossia quando è minore della metà del massimo di λ_d.

Nella ricerca inversa l'errore λ_i dipende sia dalla forma di $f(x)$, sia da Δx, sia da n; e γ_i, come nella diretta dipende dalla forma di $f(x)$ e da Δx, ma non da n. Si ammette ordinariamente che, in questa ricerca inversa, l'interpolazione si possa fare quando si può fare nella ricerca diretta, ossia quando, come s'è detto orora, il minimo limite superiore che si conosce per γ_d è minore di una mezza unità dell'ultimo ordine. Per giustificare questa convenzione possiamo intanto dimostrare che, se G_d è minore di 0,5, G_i è minore di L_i. Infatti dalla (6) si ha

$$g_i = \frac{\Delta x}{|f(x_0 + \Delta x) - f(x)|}\, g_d\,,$$

quindi, per la (9), basta che sia

$$\frac{\Delta x}{|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)|}\, G_d < \frac{\Delta x}{\Delta y}\,,$$

la quale, per la (10), si verifica *a fortiori*, se

$$\frac{\Delta x}{\Delta y - 1}\, G_d < \frac{\Delta x}{\Delta y}\,,$$

---

[1] V. il § 3 della nota già citata: *Sopra uno degli errori...*

ossia se

$$G_d < \frac{\Delta y - 1}{\Delta y}.$$

E questa è certamente verificata per $G_d < 0{,}5$, perchè il secondo membro cresce al crescere di Δy e il suo minimo valore si ha per $\Delta y = 2$ (chè per $\Delta y < 2$ l'interpolazione non occorre). Ma giustificazione molto maggiore, si troverà nei casi che dovremo considerare in seguito, perchè in essi, o G_d sarà molto minore di 0,5, o, se G_d sarà prossimo a 0,5, Δy sarà molto maggiore di 2 e quindi L_i molto più piccolo.

Osservazione. — Quando Δy è molto grande, L_i è molto piccolo, sempre per la (9), e quindi può presentarsi il caso che nella ricerca inversa si possa, colla interpolazione, ottenere una approssimazione sufficiente senza che G_i sia minore di L_i. Questo caso si presenterà in alcuni dei casi che dovremo considerare in seguito, e sarà allora particolarmente esaminato.

8. Per eseguire le operazioni aritmetiche richieste dalla interpolazione semplice è bene stabilire delle regole fisse, colle quali si eviti un lavoro inutile nella ricerca diretta, e una approssimazione insufficiente, o illusoria, nella ricerca inversa (N. § 1).

E queste regole, indicando con μ l'errore da essa prodotto e attribuendo a m_d, m_i, M_d, M_i i soliti corrispondenti significati, devono essere scelte in modo che M_d sia minore del più grande dei due valori G_d ed L_i (perchè l'approssimazione sia sufficiente), senza però essere minore di un decimo del valore stesso (perchè l'approssimazione non sia illusoria); e che altrettanto accada di M_i rispetto al più grande dei due valori G_i ed L_i (N. § 11).

A proposito poi delle regole stesse, ricorderemo che (N. § 50), se quelle relative alla ricerca diretta sono solo opportune e non necessarie, quelle relative alla ricerca inversa sono invece indispensabili, sia perchè danno un criterio logico e fisso per arrestare la divisione (che in questa ricerca occorre e che, generalmente, non riesce esatta) sia perchè danno un'idea, generalmente esatta, della approssimazione del risultato a cui si arriva.

Osservazione. — Stabilimmo già le regole accennate per i logaritmi dei numeri (N. §§ 19 e 20), e per i logaritmi trigonometrici (N. §§ 26 e 27), e facemmo rilevare le lacune e le contraddizioni che, in proposito, si trovano anche nei trattati di *Trigonometria* più autorevoli (N. § 56).

Applicazione a una tavola di valori naturali.

9. Cominciamo col dedurre dalla (5) e dalla (7) i valori di G_d e di G_i per le tre funzioni seno, tangente e secante.

Se

$$f(x) = \operatorname{sen} x,$$

dalla (5) si ha

$$\gamma_d = + \frac{\delta x}{\Delta x}\left(1 - \frac{\delta x}{\Delta x}\right)\frac{\overline{\Delta x}^2}{2} \operatorname{sen}(x_0 + \theta \Delta x); \tag{12}$$

ed, osservando che

$$\operatorname{sen}(x_0 + \Delta x) - \operatorname{sen} x_0 = \Delta x \cos(x_0 + \theta_1 \Delta x), \tag{13}$$

cresce al crescere di x_0, essendo

$$D_x \frac{\cos x}{\cos(x+\Delta x)} = \frac{\operatorname{sen}\Delta x}{\cos^2(x+\Delta x)}. \tag{22}$$

Osservazione I. — Dalla (17) e dalla (19), per $\delta x = \frac{1}{2}\Delta x$, si ha anche

$$g_d > \frac{\overline{\Delta x}^2}{4} \cdot \frac{\tan x_0}{\cos^2 x_0}, \quad (20)' \qquad g_i > \frac{\overline{\Delta x}^2 (\Delta x)''}{4} \cdot \frac{\tan x_0 \cos(x_0+\Delta x)}{\operatorname{sen}\Delta x \cos x_0}, \quad (21)'$$

dalle quali si può dire quel che s'è detto per la (15)' e per la (16)' nella Oss. al § precedente.

Osservazione II. — Quando si vuol calcolare una espressione trigonometrica coi valori naturali, è, evidentemente, opportuno, se è possibile, sostituire delle addizioni a delle moltiplicazioni {veggasi per es., la (3) e la (3)'}, contrariamente a quanto si cerca di fare quando si vogliono usare i logaritmi.

Così per il calcolo delle (20), (20)', (21), (21)' sarà opportuno osservare che

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{\tan(x_0+\Delta x)}{\cos^2(x_0+\Delta x)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\tan(x_0+\Delta x)}{1+\cos 2(x_0+\Delta x)}, \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{4} \cdot \frac{\tan(x_0+\Delta x)\cos x_0}{\operatorname{sen}\Delta x \cos(x_0+\Delta x)} &= \frac{\csc\Delta x}{4} \cdot \frac{\operatorname{sen}(2x_0+\Delta x)+\operatorname{sen}\Delta x}{1+\cos 2(x_0+\Delta x)} \\ \frac{1}{4} \cdot \frac{\tan x_0 \cos(x_0+\Delta x)}{\operatorname{sen}\Delta x \cos x_0} &= \frac{\csc\Delta x}{4} \cdot \frac{\operatorname{sen}(2x_0+\Delta x)-\operatorname{sen}\Delta x}{1+\cos 2x_0} \end{aligned}\right\}. \tag{24}$$

11. Se

$$f(x) = \sec x$$

dalla (5) si ha

$$\gamma_d = -\frac{\delta x}{\Delta x}\left(1-\frac{\delta x}{\Delta x}\right)\frac{\overline{\Delta x}^2}{2} \cdot \frac{1+\operatorname{sen}^2(x_0+\theta\Delta x)}{\cos^3(x_0+\theta\Delta x)}; \tag{25}$$

ed osservando che

$$\sec(x_0+\Delta x) - \sec x_0 = \frac{\cos x_0 \cos(x_0+\Delta x)}{\Delta x \operatorname{sen}(x_0+\theta_1\Delta x)}; \tag{26}$$

dove θ_1 ha il solito significato, dalla (7) si ha anche

$$\gamma_i = +\frac{\delta x}{\Delta x}\left(1-\frac{\delta x}{\Delta x}\right)\frac{\overline{\Delta x}^2}{2} \cdot \frac{1+\operatorname{sen}^2(x_0+\theta\Delta x)}{\cos^3(x_0+\theta\Delta x)} \cdot \frac{\cos x_0\cos(x_0+\Delta x)}{\operatorname{sen}(x_0+\theta_1\Delta x)}; \tag{27}$$

dunque γ_d e γ_i sono per eccesso o per difetto rispettivamente.

Dalla (25) e dalla (27), colle solite considerazioni e coi soliti simboli, si ha

$$g_d < \frac{\overline{\Delta x}^2}{8} \cdot \frac{1+\operatorname{sen}^2(x_0+\Delta x)}{\cos^3(x_0+\Delta x)}, \tag{28}$$

$$g_i < \frac{\Delta x (\Delta x)''}{8} \cdot \frac{1+\operatorname{sen}^2(x_0+\Delta x)}{\cos^2(x_0+\Delta x)\tan x_0}. \tag{29}$$

È evidente anche qui, che G_d cresce al crescere di x_0 e tende all'∞ quando x_0 tende a $\frac{1}{2}\pi - \Delta x$. In quanto a G_i si vede subito che esso tende all'∞, tanto per x_0 tendente a zero, quanto per x_0 tendente a $\frac{1}{2}\pi - \Delta x$; ma non è così facile vedere che si ha un minimo solo e trovare il valore di x_0 corrispondente. Infatti, volendo applicare il solito metodo indicato dal *Calcolo Infinitesimale*, siccome, dopo facili trasformazioni, si ha

$$D_x \frac{1+\operatorname{sen}^2(x+\Delta x)}{\cos^2(x+\Delta x)\tan x} = \frac{4\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}2(x+\Delta x) - \{3+2\cos 2(x+\Delta x) - \cos^2 2(x+\Delta x)\}}{4\cos^4(x+\Delta x)\operatorname{sen}^2 x}$$

occorrerebbe studiare la variazione della funzione

$$\varphi(x) = 4 \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 2(x+\Delta x) - \{3 + 2\cos 2(x+\Delta x) - \cos^2 2(x+\Delta x)\} \quad (30)$$

al variare di x da zero a $\frac{1}{4}\pi - \Delta x$, gli estremi esclusi; ma l'equazione che si ottiene eguagliando $\varphi(x)$ a zero non è risolubile rispetto ad x, quindi bisogna ricorrere a qualche artifizio.

Si cominci dall'osservare che si ha

$$\frac{1+\operatorname{sen}^2(x+\Delta x)}{\cos^2(x+\Delta x)\tan x} = [1+\operatorname{sen}^2(x+\Delta x)] \cdot \left[\frac{\cos x}{\cos(x+\Delta x)}\right] \cdot \left[\frac{1}{\operatorname{sen} x \cos(x+\Delta x)}\right];$$

ora, è chiaro che i primi due fattori del secondo membro crescono ambedue [per il secondo si ricordi la (22)] al crescere di x da zero a $\frac{1}{2}\pi - \Delta x$; in quanto al terzo, essendo

$$D_x \operatorname{sen} x \cos(x+\Delta x) = \cos(2x+\Delta x), \quad (31)$$

si vede che il suo denominatore cala certamente per $2x+\Delta x \geqslant \frac{1}{2}\pi$, ossia per $x \geqslant \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\Delta x$; dunque G_1 cresce sempre e tende all'∞ al crescere di x_0 da $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi - \Delta x)$ a $\frac{1}{2}\pi - \Delta x$. Per vedere poi come varî $\varphi(x)$ al variare di x da zero a $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\Delta x$, si noti che (fra questi valori) il primo termine cresce sempre e il secondo cala sempre, perchè

$$D_x \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 2(x+\Delta x) = 2 \operatorname{sen}(4x + 2\Delta x), \quad (32)$$

che è maggiore di zero per $4x + 2\Delta x \leqslant \pi$, ossia per $x \leqslant \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\Delta x$; e inoltre

$$D_x\{2\cos 2(x_0+\Delta x) - \cos^2 2(x+\Delta x)\} = \operatorname{sen} 2(x+\Delta x)\{\cos 2(x+\Delta x) - 2\}, \quad (33)$$

il cui primo fattore, fra i limiti, indicati è certamente positivo, mentre il secondo è sempre negativo. Dunque $\varphi(x)$ da zero a $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\Delta x$ cambia segno una volta sola e, se x' è il valore corrispondente di x, si può asserire che G_1 cala sempre al crescere di x da zero fino a x' (l'estremo inferiore escluso) e cresce sempre da x' a $\frac{1}{2}\pi - \Delta x$ (l'estremo superiore escluso); ma, per la ragione indicata, non è possibile trovare questo valore x' e quindi neppure il corrispondente minimo.

Si può però osservare che la diseguaglianza

$$4 \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 2(x+\Delta x) < 3 + 2\cos 2(x+\Delta x) - \cos^2 2(x+\Delta x)$$

è *a fortiori* verificata, se è verificata l'altra

$$4 \operatorname{sen}^2 2(x+\Delta x) < 3 + 2\cos 2(x+\Delta x) - \cos^2 2(x+\Delta x),$$

e questa si vede facilmente essere verificata per $2(x+\Delta x)$ non minore dell'arco che ha per coseno $\frac{1}{3}$; quindi, indicando con α l'arco positivo minimo che ha questo coseno, è certo che al variare di x_0 da zero a $\frac{1}{2}\alpha - \Delta x$, G_1 cala sempre. Il valore x' è dunque compreso fra $\frac{1}{2}\alpha - \Delta x$ e $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\Delta x$, e, siccome per la natura della questione che stiamo trattando, si deve supporre che x_0 cresca non con continuità ma di successivi intervalli eguali a Δx, sarà facile, dopo pochi tentativi, trovare, fra $\frac{1}{2}\alpha - \Delta x$ e $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\Delta x$, questo valore x' e il minimo corrispondente.

Osservazione I. — È utile osservare, anche qui, che dalla (28) e dalla (29), per $\delta x = \frac{1}{2}\Delta x$, si ha anche

$$g_d > \frac{\overline{\Delta x}^2}{8} \cdot \frac{1+\operatorname{sen}^2 x_0}{\cos^3 x_0}, \quad (28)' \qquad g_1 > \frac{\Delta x(\Delta x)''}{8} \cdot \frac{1+\operatorname{sen}^2 x_0}{\cos^2 x_0 \tan(x_0+\Delta x)} \quad (29)'$$

delle quali si può ripetere quello che s'è detto per la (15)' e per la (16)' nella Oss. al § 9.

Osservazione II. — Analogamente a quanto si è fatto nella Oss. II al § prec. sarà ora opportuno osservare che

$$\frac{1+\text{sen}^2(x_0+\Delta x)}{\cos^3(x_0+\Delta x)}=\frac{3-\cos 2(x_0+\Delta x)}{1+\cos 2(x_0+\Delta x)}\sec(x_0+\Delta x), \tag{34}$$

$$\frac{1+\text{sen}^2(x_0+\Delta x)}{\cos^2(x_0+\Delta x)\tan x_0}=\frac{3-\cos 2(x_0+\Delta x)}{1+\cos 2(x_0+\Delta x)}\text{ctn}\, x_0\,. \tag{35}$$

Osservazione III. — E anche nella ricerca del minimo di $\varphi(x)$ sarà opportuno, per il calcolo numerico, osservare che la (30) si può trasformare nell'altra equivalente

$$2\varphi(x)=\{4\cos 2\Delta x+\cos 4(x+\Delta x)\}-\{5+4\cos 2(x+\Delta x)+4\cos(4x+2\Delta x)\}. \tag{36}$$

G. Pesci.

(*Continua*).

Sulla divisione all'infinito d'una qualsiasi successione periodica per un qualsiasi numero p, primo con la base g del sistema di numerazione adoperato.

1. Dati tre gruppi di cifre A', A'', C costituiti ordinatamente da α', α'', γ cifre del sistema di numerazione a base g, col simbolo

A', A'' (C)

che si ottiene, com'è chiaro, scrivendo successivamente i tre gruppi, ponendo la virgola tra il primo ed il secondo, e chiudendo tra parentesi il terzo, rappresenteremo la successione infinita (che per convenzione diremo *numero* decimale periodico)

A', A''CCC...

dove la scrittura del gruppo C dev'essere immaginata protratta all'infinito.

Al numero A', A'' (C) daremo il nome di *periodico semplice* se A'' e C son gruppi identici, nel caso cioè in cui a cominciare dalla virgola ci son cifre che nello stesso ordine si ripetono all'infinito; daremo invece il nome di *periodico misto* se A'' e C son gruppi differenti, nel caso cioè in cui dopo la virgola sono alquante cifre che più non si ripetono, e vengono poi quelle che nello stesso ordine ripetonsi all'infinito. Ai gruppi A'' e C daremo ordinatamente il nome di *antiperiodo* e *periodo*, e diremo rispettivamente antiperiodiche e periodiche le cifre di cui rimangono costituiti l'uno e l'altro.

Dividere all'infinito A', A'' (C) per un numero p vale effettuare successive divisioni, senza mai arrestarsi, tali che tutte abbian p per

è λ quando è $g^\gamma - 1$ primo con p. Supposto anche C primo con p la (1) dice che il minimo valore di k per cui

$$N_k - N_0 g^{k\gamma}$$

diventa multiplo di p è λ. Per ciò, se n è un divisore di λ, diverso da λ, il quoziente

$$Q = \frac{N_\lambda - N_0 g^{\lambda\gamma}}{N_n - N_0 g^{n\gamma}} = \frac{C\dfrac{g^{\lambda\gamma}-1}{g^\gamma -1}}{C\dfrac{g^{n\gamma}-1}{g^\gamma -1}} = \frac{g^{\lambda\gamma}-1}{g^{n\gamma}-1} = \sum_{i=0}^{i=\frac{\lambda}{n}-1} g^{in\gamma}$$

è multiplo di p. Abbiamo cioè la congruenza

$$\sum_{i=0}^{i=\frac{\lambda}{n}-1} g^{in\gamma} \equiv 0 \qquad (\text{mod } p).$$

Moltiplicando per $(N_1 - N_0)\, g^{k\gamma}$, con k intero qualsiasi, abbiamo

$$\sum_{i=0}^{i=\frac{\lambda}{n}-1} (N_1 - N_0)\, g^{\gamma(in+k)} \equiv 0 \qquad (\text{mod } p). \tag{2}$$

Ma è evidente l'eguaglianza

$$(N_1 - N_0)\, g^{t\gamma} = N_{t+1} - N_t,$$

e sappiamo che $N_t \equiv r_t$ (mod p), qualunque sia t; dunque la (2) può anch'essere scritta così

$$\sum_{i=0}^{i=\frac{\lambda}{n}-1} (r_{in+k+1} - r_{in+k}) \equiv 0 \qquad (\text{mod } p)$$

ossia

$$\sum_{i=0}^{i=\frac{\lambda}{n}-1} r_{in+k+1} \equiv \sum_{i=0}^{i=\frac{\lambda}{n}-1} r_{in+k} \qquad (\text{mod } p).$$

Le forme che quest'ultima congruenza assume ordinatamente per $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, ne fanno convinti che dei sommatori seguenti, anch'essi estesi da $i=0$ ad $i = \dfrac{\lambda}{n} - 1$,

$$\Sigma r_{in}\,; \qquad \Sigma r_{in+1}\,; \qquad \Sigma r_{in+2}\,; \ \ldots$$

il primo è congruo al secondo, questo al terzo, questo al quarto, e così via, sempre secondo il modulo p. Ed allora secondo lo stesso modulo il primo sarà congruo a quello che gli viene, p. es., m posti dopo, m essendo un qualsiasi intero; si ha cioè

$$\sum_{i=0}^{i=\frac{\lambda}{n}-1} r_{in} \equiv \sum_{i=0}^{i=\frac{\lambda}{n}-1} r_{in+m} \qquad (\text{mod } p). \tag{3}$$

Concludiamo: *Se nella serie* $r_0, r_1, r_2, \ldots$ *sopprimiamo tutti gli elementi aventi indici non multipli di* n, *si ha la serie*

$$r_0,\ r_n,\ r_{2n},\ r_{3n}, \ldots \tag{4}$$

in cui le infinite somme di $\frac{\lambda}{n}$ *termini consecutivi sono tutte eguali fra loro, a meno di multipli di* p.

Osservazione. — Supposto n' divisore di $\frac{\lambda}{n}$, nn' sarà divisore di λ, e quindi per la (3)

$$\sum_{i=0}^{i=\frac{\lambda}{nn'}-1} r_{inn'} \equiv \sum_{i=0}^{i=\frac{\lambda}{nn'}-1} r_{inn'+m} \pmod p.$$

E così resta dimostrato che se nella (4) si sopprimono tutti gli elementi aventi indici non multipli di nn' si ha la serie

$$r_0\ ,\ r_{nn'},\ r_{2nn'},\ r_{3nn'}, \ldots$$

nella quale le infinite somme di $\frac{\lambda}{nn'}$ termini consecutivi sono tutte eguali, a meno di multipli di p. E così via per n'' divisore di $\frac{\lambda}{nn'}$, per n''' divisore di $\frac{\lambda}{nn'n''}$, ecc.

Proprietà del periodo.

3. Posto

$$q_i = \text{quoz}\,(N_i\,;\,p)$$

siccome abbiam posto

$$r_i = \text{rest}\,(N_i\,;\,p) \qquad (\text{v. [3]})$$

possiamo scrivere

$$N_{\lambda+k} = pq_{\lambda+k} + r_{\lambda+k}$$
$$N_k = pq_k + r_k\,.$$

Sostituendo nella prima di queste due ultime eg. r_k al posto del suo eguale $r_{\lambda+k}$, moltiplicando la seconda per $-g^{\lambda\gamma}$ e sommando infine membro a membro abbiamo

$$N_{\lambda+k} - N_k g^{\lambda\gamma} = p\,(q_{\lambda+k} - q_k g^{\lambda\gamma}) - r_k\,(g^{\lambda\gamma} - 1). \tag{5}$$

Poniamo ancora

$$N_{\lambda+k} - N_k g^{\lambda\gamma} = C_\lambda\,;$$
$$q_{\lambda+k} - q_k g^{\lambda\gamma} = Q_k\,; \qquad g^{\lambda\gamma} - 1 = G\,; \qquad \frac{g^{\lambda\gamma}-1}{g^{\gamma}-1} = G'.$$

Il C_λ è dunque il numero costituito dalle $\lambda\gamma$ cifre che bisogna scrivere a destra della ridotta N_k per avere la ridotta $N_{\lambda+k}$; ossia da λ gruppi tutti identici a C: esso è indipendente da k ed eguale a CG'.

Il Q_k è il numero costituito dalle cifre che bisogna scrivere a destra del quoziente q_k per avere il quoziente $q_{\lambda+k}$.

Sostituendo, la (5) prende la forma

$$C_\lambda = pQ_k - r_k G. \tag{6}$$

da cui ricaveremo conseguenze importanti per ulteriori dimostrazioni.

Innanzi tutto si noti che p è divisore di G; ed allora, essendo multiplo di p il secondo membro della (6), abbiamo

$$C_\lambda \equiv 0 \pmod p \tag{7}$$

Poniamo adesso $C_\lambda = pC'_\lambda$; la (6) diventa

$$pC'_\lambda = pQ_k - r_k G$$

donde scende immediatamente la congruenza

$$pC'_\lambda \equiv pQ_k \qquad (\mathrm{mod}\ G)$$

e quindi l'altra

$$pC'_\lambda \equiv pQ_k \qquad (\mathrm{mod}\ \mathbf{G}).$$

Nel caso poi di p primo col modulo possiamo scrivere

$$pC'_\lambda \equiv Q_k \qquad (\mathrm{mod}\ \mathbf{G}). \tag{8}$$

(Il segno $\mathbf{G}$ sta per " sottomultiplo di G ").

Si noti infine che, essendo multipli di G' così il primo come il terzo termine della (6), possiamo scrivere

$$pQ_k \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ G')$$

e quindi anche

$$pQ_k \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \mathbf{G}').$$

Nel caso di p primo col modulo sarà anche

$$Q_k \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \mathbf{G}'). \tag{9}$$

(Il segno $\mathbf{G}'$ sta per " sottomultiplo di G' ").

4. Richiamando quanto è stato dimostrato al § [16], possiam dire che, spezzato graficamente Q_k, da destra verso sinistra, in parti di c cifre l'una (l'ultima a sinistra potrà averne anche meno), se si fa la somma di queste parti, e poi si opera analogamente su questa per avere un'altra somma, e così via, sino ad ottenere una somma (la indicheremo con $S_{k,c}$) avente non più di c cifre, avremo

$$S_{k,c} \equiv Q_k \qquad (\mathrm{mod}\ g^c - 1). \tag{10}$$

Ma il modulo $g^c - 1$ è il massimo numero di c cifre; dunque $S_{k,c}$ non potrà superarlo.

Se si sceglie c divisore di $\gamma\lambda$, $g^c - 1$ sarà divisore di G, e quindi, nel caso di $g^c - 1$ primo con p, la (10) può scriversi, per via della (8),

$$S_{k,c} \equiv C'_\lambda \qquad (\mathrm{mod}\ g^c - 1)$$

Per $k = i$ e $k = j$ si hanno le congruenze

$$S_{i,c} \equiv C'_\lambda \quad (\mathrm{mod}\ g^c - 1); \qquad S_{j,c} \equiv C'_\lambda \quad (\mathrm{mod}\ g^c - 1)$$

e quindi

$$S_{i,c} \equiv S_{j,c} \qquad (\mathrm{mod}\ g^c - 1).$$

Ma abbiamo osservato sopra che i membri di questa congruenza non possono superare il modulo; dev'essere dunque

$$S_{i,c} = S_{j,c}\,.$$

Si noti ancora che C'_λ non dipende da N_0.

CONCLUDENDO: *Se* c *divide* $\lambda\gamma$ *ed è* g^c-1 *primo con* p, *il numero* $S_{k,c}$ *si mantiene costante al variare di* k *e di* N_0.

5. *Per ogni coppia di numeri* c *e* c' *tali che* $\dfrac{g^{cc'}-1}{g^{c'}-1}$ *risulti diverso da* 1, *primo con* p *e divisore di* G', *il numero* $S_{k,cc'}$, *se ha più di* $\gamma\lambda$ *cifre,*

è graficamente scomponibile in gruppi identici fra loro, di c' cifre, ha cioè forma periodica semplice.

Difatti per la (10) si ha

$$S_{k,cc'} \equiv Q_k \pmod{g^{cc'}-1}, \quad \text{e quindi} \quad S_{k,cc'} \equiv Q_k \left(\bmod \frac{g^{cc'}-1}{g^{c'}-1}\right).$$

Ma per la fatta ipotesi ha luogo la (9); dunque

$$S_{k,cc'} \equiv 0 \qquad \left(\bmod \frac{g^{cc'}-1}{g^{c'}-1}\right).$$

Possiamo per tanto porre $S_{k,cc'} = D\,\dfrac{g^{cc'}-1}{g^{c'}-1}$.

Siccome l'intero D non ha più di

$$cc' - (cc' - c' + 1) + 1 = c'$$

cifre, se rappresentiamo con D' il gruppo che si ottiene scrivendogli a sinistra gli zeri necessarii (se n'è il caso) perchè esso risulti proprio di c' cifre, e rappresentiamo con V il numero che si ottiene scrivendo c volte di seguito questo gruppo D', abbiamo

$$V = D\,[g^{(c-1)c'} + g^{(c-2)c'} < \ldots + g^{c'} + 1] = D\,\frac{g^{cc'}-1}{g^{c'}-1} = S_{k,cc'}.$$

Osservazione. — Se n è divisore di λ diverso da 1 e λ, la coppia n, γ soddisfa alle condizioni volute purchè sia p primo in sè e primo con $g^{\gamma}-1$. Difatti p, essendo primo con $g^{\gamma}-1$, non dividerà (per via di $n<\lambda$) il numero $g^{n\gamma}-1$ (v. [3]) e quindi nemmeno il quoto $\dfrac{g^{n\gamma}-1}{g^{\gamma}-1}$, col quale sarà dunque primo. È poi, per la fatta ipot.,

$$\frac{g^{n\gamma}-1}{g^{\gamma}-1} \mp 1 \quad \text{e divisore di} \quad \frac{g^{\lambda\gamma}-1}{g^{\gamma}-1}.$$

6. Dalle cose dette ai § 2, 3, 4, 5 risulta quanto segue, nell'ipotesi di p primo in sè, con $g^{\gamma}-1$ e con C, e di n divisore di λ diverso da 1 e da λ.

Divisa una circonferenza in λ parti eguali; numerati i punti di divisione, a partire da uno qualunque, in un senso o nell'altro; scritti sui raggi che vanno ai punti di divisione i successivi resti $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_\lambda$ in modo che sul raggio i-esimo cada il resto r_i; e scritto sulla circonferenza, nel senso del movimento delle sfere d'un orologio, il numero Q_k di $\lambda\gamma$ cifre in modo che su ciascuna delle λ parti cadano γ cifre;

se nel piano della circonferenza ed intorno al suo centro gira rigido, in un senso o nell'altro, un fascio regolare di $\dfrac{\lambda}{n}$ raggi,

α) *la somma dei $\dfrac{\lambda}{n}$ resti che vengono a trovarsi contemporaneamente sui lati di questo poliraggio equiangolo si mantiene costante a meno d'un multiplo di* p.

β) *la somma dei $\dfrac{\lambda}{n}$ numeri di* $n\gamma$ *cifre che vengono a trovarsi contemporaneamente negli angoli del detto poliraggio si mantiene costante*

Ma non è

$$N_1 \equiv N_0 \pmod{p}$$

perchè è per ipotesi $r \neq r_0$; dunque non è

$$N_1 - N_0 \equiv 0 \pmod{p}$$

il che porta, p essendo primo, che $N_1 - N_0$ e p sono primi fra loro, per cui la congruenza (11) può anche scriversi

$$g^{n\gamma} \equiv -1 \pmod{p}. \tag{12}$$

Quadrando, abbiamo

$$g^{2n\gamma} \equiv 1 \pmod{p}$$

ossia

$$g^{2n\gamma} - 1 \equiv 0 \pmod{p}. \tag{13}$$

Si noti intanto che non può aversi $g^{\gamma} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ perchè si avrebbero (secondo lo stesso modulo) successivamente le congruenze $g^{\gamma} \equiv 1$; $g^{n\gamma} \equiv 1$ delle quali la seconda combinata con la (12) darebbe $1 \equiv -1 \pmod{p}$, ossia $2 \equiv 0 \pmod{p}$ e noi abbiamo escluso per p il valore 2.

Ciò posto, ricordando che le radici della

$$g^{x\gamma} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

sono multiple di λ, la (13) ne avverte che $2n$ è multiplo di λ. Ci rimane da mostrare che si ha proprio $2n = \lambda$.

Non può essere $2n = 0 . \lambda$, perchè sarebbe $n = 0$ e quindi $r_n = r_0$. Non può nemmeno essere $2n = 2 . \lambda$, perchè sarebbe $n = \lambda$ e quindi $r_n = r_\lambda = r_0$, il che contraddice alla ipotesi. Nè infine può essere $2n = t\lambda$ con $t > 2$, perchè sarebbe

$$r_{\frac{2n}{t}} = r_\lambda = r_0 \qquad \text{con} \qquad \frac{2n}{t} < n$$

il che pure è contrario all'ipotesi. Dev'essere dunque $2n = 1 . \lambda = \lambda$.

10. Corollario 1°. — Nel caso di $r_0 = 0$ ed $r_1 \neq 1$, pel teorema testè dimostrato, se i primi n elementi della successione

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, r_{n+1}, \ldots$$

sono diversi da zero, la congruenza

$$r_n \equiv r_{n+1} + 1 \pmod{p}$$

esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè sia $\lambda = 2n$.

Si noti che i numeri non nulli r_n ed $r_{n+1} + 1$ non superano p e quindi non possono essere congrui secondo p se non sono eguali; ed allora si capirà come la congruenza ultima si converta nell'eguaglianza

$$r_n = r_{n+1} + 1.$$

Dunque: *Dato un numero* N_0, *anche nullo, multiplo di* p, *e dato un gruppo di cifre* C *rappresentanti un numero congruo ad* 1 *secondo il numero* p, *primo in sè, diverso da* 2 *e primo con* g, *la condizione necessaria e sufficiente perchè sia pari* (= 2n) *il minimo numero di volte che bisogna scrivere* C *a destra di* N_0 *per avere un multiplo di* p *è che*

i resti $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *siano diversi da zero, ed* r_n *superi di* 1 *il resto successivo.*

11. Corollario 2°. — Quando $N_0 = 0$, $C = 1$ e $\lambda = 2n$, la divisione parziale, che porge r_{n+1}, ha per dividendo $r_n g + 1$, per divisore p e per quoziente un numero di una sola cifra, poniamo ε. Si ha per tanto

$$r_n g + 1 = \varepsilon p + r_{n+1}$$

ma (C 1°) è

$$r_{n+1} + 1 = r_n .$$

Sostituendo viene

$$r_n g + 1 = \varepsilon p + r_n - 1$$

ossia

$$\varepsilon p = r_n (g - 1) + 2.$$

Dunque nelle fatte ipotesi e per $g > 3$ *il resto* r_n *è il quoziente di quello tra i primi* $g - 1$ *multipli di* p *che diviso per* $g - 1$ *dà per resto* 2.

G. Calvitti

Ascoli Piceno.

LA RECENTE RIFORMA DEGLI STUDI SECONDARI IN FRANCIA

del 30 maggio 1902

(Decreti del 27, 28 luglio ed 8 settembre 1905)

Istruzioni relative all'insegnamento delle matematiche.

I programmi di matematiche debbono venir considerati come indici delle materie da insegnarsi nelle varie classi; ogni libertà è lasciata al professore di adottare l'ordine che gli convenga, di servirsi dei metodi che gli sembreranno più utili agli scolari che dirige.

Nel secondo ciclo, gli studi dovendo venir sanzionati dall'esame di baccalaureato, il professore deve naturalmente esporre tutto quanto figura nel programma; nel primo ciclo, egli è libero di ogni preoccupazione di esame e non ha altra guida che lo sviluppo dei proprî scolari; può quindi, se lo crede utile, trascurare alcuni punti ed insistere maggiormente sulle parti più accessibili o più necessarie agli scolari speciali che gli vengono affidati; il programma verrà considerato come un massimo; meglio è per i ragazzi acquistare cognizioni precise poco estese, anzichè avere idee vaghe su argomenti molto svariati.

Se è indispensabile lasciare al maestro gran libertà nella scelta dei metodi, affinchè il suo insegnamento abbia una certa efficacia, occorre però ben precisare lo spirito secondo il quale tale insegnamento deve venire impartito, onde conservargli, nel suo insieme, una

direzione unica ed evitare che il passaggio da una classe all'altra riesca pel ragazzo causa di confusione nei suoi studi. Si chiede dunque ai professori di inspirarsi alle seguenti indicazioni circa i programmi dei varî cicli.

1° Ciclo B.

Bisognerà non dimenticare che gli scolari sono giovani ragazzi, alcuni dei quali lasceranno il liceo dopo la Terza; quindi, gli esercizî pratici dovranno essere moltiplicati ed estendersi su dati reali e non fittizî; la teoria verrà ridotta a spiegazioni fatte sopra esempî concreti, almeno dapprincipio; soltanto poco a poco sarà possibile, con grandi precauzioni, abituare gli allievi alle più semplici nozioni astratte, mostrando con esempî numerosi la necessità di una definizione precisa, di un ragionamento puramente logico, insistendo, ove occorra, sugli errori che si possono commettere, se si ragioni su argomenti mal definiti, su figure i cui elementi e posizione non siano stati esattamente determinati. Le raccolte di problemi divertenti forniranno numerosi esempî che colpiranno l'intelligenza degli scolari; citiamo, a caso, la dimostrazione dell'uguaglianza di 64 e 65, di un angolo retto e di un angolo ottuso, ecc.

Aritmetica. — Gli studenti debbono venire esercitati al calcolo numerico ed alla risoluzione dei problemi la cui soluzione non esige artificio alcuno; non vi è scopo, particolarmente, nel domandare ai ragazzi di limitarsi ad impiegare soltanto mezzi puramente aritmetici, se l'algebra offre una soluzione semplice ed immediata di una quistione. Si insisterà sull'ordine di grandezza dei risultati, richiamando l'attenzione sopra gli errori che il buon senso permette d'evitare: facendo variare i dati di un problema, sostituendo, per esempio, centimetri a metri, si chiederà di prevedere qsale sarà l'ordine di grandezza del nuovo risultato, in confronto all'antico; sopratutto bisogna evitare che l'allievo eseguisca macchinalmente dei calcoli, senza rendersi conto, continuamente, della corrispondenza loro colla realtà.

Il programma di contabilità è stato scorciato e sostituito dall'indicazione di nozioni sui calcoli pratici adoperati nella banca e nel commercio, vi si eserciteranno gli studenti, avendo cura di non operare che su dati precisi tolti alle operazioni reali.

Il professore è invitato a trattare questa parte del programma con tanta più cura, inquantochè è stata considerevolmente semplificata, e queste nozioni possono essere indispensabili agli scolari che lasciano il liceo od il collegio dopo il primo ciclo.

La parte teorica è ridotta allo studio dell'addizione, della sottrazione, della moltiplicazione dei numeri interi, della ricerca dei caratteri di divisibilità, delle frazioni, tale studio compiendosi sopra esempî concreti. Tuttavia, non vi ha in ciò niente d'assoluto: se uno studente ha la curiosità di rendersi conto del meccanismo di

Si avrà così occasione di dimostrare che vi sono due certezze d'ordini differenti: una, sperimentale, appartenente alle scienze fisiche; l'altra, logica, appartenente alle verità matematiche; ma, vi sarebbe un grave inconveniente nel dare a quest'ultima una importanza che in realtà non ha e nel gettare il discredito sulla prima, che, bisogna ben riconoscerlo, è la sola che possediamo, poichè i principî matematici non hanno alcun altro fondamento, almeno per gli studenti. Ciò che importerà far risaltare, è l'importanza del ragionamento logico per ridurre al minimum i fatti sperimentali; sarebbe facile moltiplicare gli esempî; se si costruisce un decagono regolare inscritto, si constata sperimentalmente che è quasi impossibile chiuderlo; al contrario, prendendo per lato di un poligono regolare la metà del lato del triangolo equilatero, si ottiene sensibilmente un eptagono regolare; se si misura la somma degli angoli di un triangolo, si trovano numeri vicini a 180°, ecc. Questi esempî dimostrano che l'esperienza fa presentire una verità, ma non basta a farla conoscere in modo preciso; se è dunque possibile, coll'aiuto di un ragionamento logico, metter questa verità in evidenza o d'infirmare ciò che sembrava dare l'esperienza, vi è molto vantaggio nel farlo; è ugualmente opportuno far risaltare l'interesse pratico presentato dal metodo puramente logico, insistendo sull'avere esso fatto scomparire ogni incertezza nei resultati. Si sarà così preparato lo studio della geometria, che verrà fatto nel secondo ciclo, in cui gli allievi avvertiti non si stupiranno della minuta cura colla quale vengono dimostrati i minimi teoremi.

Un costante richiamo alla nozione del moto sembra debba facilitare l'insegnamento della geometria; così il parallelismo verrà legato alla nozione sperimentale di traslazione, e lo studio delle rette e piani perpendicolari risulterà dalla rotazione; l'idea d'uguaglianza sarà legata a quella del trasporto delle figure, che verrà precisata introducendo la nozione tanto semplice d'orientamento.

Il disegno è chiamato a rappresentare una parte importante nell'insegnamento della gometria così concepito; si dovranno fare eseguire bene esattamente le costruzioni indicate nel corso e mescolare intimamente il calcolo alle misure direttamente effettuate. È specialmente in Terza che si potranno interessare gli allievi, facendo loro eseguire disegni semplicissimi relativi alle ombre e sezioni piane; non sarebbe il caso di indicare i metodi generali della geometria descrittiva o della geometria quotata: ogni quistione dovrà venire studiata in sè stessa, e l'ingegnosità dell'allievo potrà venire esercitata colla ricerca dei modi più atti a dare la soluzione del problema; dovrà servirsi dei più importanti teoremi del corso e giudicherà così della loro utilità. Nulla impedirà di far costruire il corpo rappresentato dal disegno, di calcolarne gli elementi, poi di misurarli mediante il disegno o sul corpo stesso: il confronto dei varî risultati permetterà di apprezzare il valore d'ogni procedimento.

avendo dinanzi a sè scolari intelligenti e lavoratori, sarà solo giudice dello sviluppo che può dare al proprio corso; l'importante è che formi allievi che possano capire le matematiche; non occorre che ne sappiano molto; ciò che è indispensabile, è che abbiano compreso i principî, e siano abituati al ragionamento logico.

2° Ciclo C e D.

I programmi del secondo ciclo scientifico sono stati concepiti in modo da permettere agli scolari che entrano a Matematiche *A* e *B* di possedere a fondo gli elementi di geometria, d'algebra e di trigonometria.

La forma da darsi all'insegnamento è quella adottata attualmente, gli studi fatti nel primo ciclo avendo preparato gli scolari a ricevere un insegnamento logico; non si dimenticherà che solo facendo numerosi esercizî si abituano gli allievi a servirsi con sicurezza degli elementi di cui dispongono.

Sarà bene far risaltare i legami intimi tra le varie parti del corso, tenendo di pari passo la parte algebrica e quella geometrica; non vi ha inconveniente alcuno nell'introdurre le relazioni trigonometriche nelle dimostrazioni geometriche, nell'utilizzare per la determinazione dei volumi il metodo infinitesimale, che si può presentare con ogni rigore nei casi semplici.

Matematiche *A* e *B*.

In Matematiche *A* e *B*, il professore non dovrà far corsi sulle materie già scorse nelle classi di Seconda e Prima, in algebra, trigonometria, geometria e geometria descrittiva; ma dovrà accertarsi, con interrogazioni metodiche ed esercizî, che tutti gli allievi le studino e le posseggano.

Specialmente, sarebbe interessante riunire in geometria tutto quanto è descrittivo, poi tutto quanto è metrico, avvicinando lo studio dello spazio a quello del piano; ciò non presenterebbe difficoltà alcuna a studenti che hanno già fatto un primo studio della geometria ed avrebbe il vantaggio di aggruppare i fatti simili, presentando così una veduta d'insieme, senza la quale resta ben difficile coordinare le idee.

Occorre appena insistere sull'importanza da darsi agli esercizî pratici, quali rilevamento di piani, esecuzione di disegni; solo facendone una gran quantità, lo studente riterrà la geometria descrittiva e vi prenderà interesse.

In meccanica, non verrà sollevata difficoltà alcuna sui principî: il principio dell'indipendenza degli effetti delle forze potrà venir ridotto a questo che, se parecchie forze agiscono in un momento t

che vorremmo facesse nascere in qualche lettore il desiderio di occuparsi un po' di questi studi, fra noi, purtroppo, trascuratissimi [1].

L'opera è divisa in cinque capitoli, seguiti da un svariata e abbondante raccolta di utili esercizi.

Il primo capitolo contiene le definizioni fondamentali; opportuni esempi numerici e opportunissime rappresentazioni grafiche chiariscono queste definizioni e le fissano nella mente del lettore. Il capitolo finisce coi due noti teoremi [2], che stabiliscono le relazioni fra l'errore relativo e il numero delle cifre esatte. A proposito di queste definizioni, ci sia permesso insistere sopra i vantaggi che deriverebbero dalla definizione di ordine di una cifra decimale, altra volta da noi stessi raccomandata [3]; l'esposizione della teoria delle approssimazioni sarebbe sensibilmente semplificata e facilitata, poichè, p. es., sarebbe molto più semplice e più chiaro il dire che due cifre sono degli ordini $+3$ e -2, anzichè il dire che sono rispettivamente del terzo ordine, e del secondo ordine decimale (§ 3). Aggiungiamo anche che sarebbe bene, qui e in seguito, considerare fra gli esempi il caso in cui l'errore derivi dall'arrotondamento dell'ultima cifra, perchè questo caso, in pratica, si presenta frequentissimamente.

Nel secondo capitolo si risolve il primo dei due problemi che si considerano nella teoria in discorso, e cioè: *conoscendo i limiti superiori degli errori assoluti di alcuni numeri, trovare un limite superiore dell'errore assoluto del risultato di un calcolo da eseguirsi sui numeri stessi*. Si comincia coi teoremi che danno gli errori assoluti dei risultati delle operazioni fondamentali, fino alla estrazione di radice cubica: il teorema relativo al prodotto è esteso a un numero qualunque di fattori, e le dimostrazioni sono molto dettagliate (forse troppo, e ciò per una ragione che vedremo poi). Seguono alcuni esempi numerici; e a quelli che non sono *semplici* (che richiedono cioè più di una operazione) l'A., molto giustamente e molto opportunamente, cerca di dare una disposizione analoga a quella che il GUYOU dà solo per la risoluzione del secondo problema. Si ripetono poscia tutte le stesse considerazioni per i due casi in cui, invece dell'errore assoluto, si voglia conoscere l'errore relativo, oppure il numero delle cifre esatte.

Nel terzo capitolo si risolve il secondo dei problemi accennati, e cioè: *calcolare con un errore assoluto inferiore a un numero dato una espressione numerica data* (nella ipotesi, ben s'intende, che i numeri sui quali si deve operare si abbiano o

---

(1) E ciò perchè nelle nostre scuole non si parla affatto di questo importante argomento; mentre, evidentemente, la sua conoscenza è indispensabile per coloro, e sono i più, i quali studiano la matematica solo per applicarla poi alla *Ingegneria*, alla *Navigazione*, alla *Balistica*, alla *Astronomia*,... È per questo che, anche quando si tratta di applicazioni numeriche semplicissime, i giovani studiosi procedono senza criteri fissi e razionali, e spingono talvolta i risultati a una approssimazione, non solo illusoria, ma addirittura puerile.

In Francia la teoria delle approssimazioni numeriche è richiesta per l'ammissione a tutte le scuole pratiche, come la *Scuola d'Arti e Mestieri*, la *Scuola Navale*,... (e i candidati devono saper risolvere dei problemi di questo tipo: " Indicando con a e b l'ipotenusa e un cateto di un triangolo rettangolo, si ha $a = 75^m$ e $b = 32^m$ colla approssimazione di $0^m,2$ è di $0^m,1$ rispettivamente; con quale approssimazione si può ottenere l'angolo opposto a b? " (S. N. 1891). " Le dimensioni di un tronco di cono, approssimate per eccesso, sono: raggi delle basi $6^m,3$ e $3^m,1$, altezza $5^m,9$; si domanda con quale approssimazione comune bisogna misurare queste dimensioni, per poterne dedurre il volume del tronco stesso colla approssimazione di 1^{m^3} "). Ed ora è giustamente richiesta anche da coloro che, nell'ultimo anno della scuola secondaria, hanno preferita la classe di *Matematica* a quello di *Filosofia*.

Perchè non si può fare altrettanto in Italia, specialmente dopo le modificazioni portate nei programmi dei licei colla legge del Novembre 1904? A noi pare che ai giovani che si preparano allo studio delle matematiche applicate, sarebbe molto più utile insegnare come si debbano eseguire le ordinarie operazioni sui numeri che si presentano in pratica, anzichè insegnar loro (in terza classe) i complementi della teoria dei numeri primi.

(2) Veggasi VIELLE, *Théorie générale des approximations numériques*. (Ed. Mallet-Bachelier, Paris, 1854): è l'opera più estesa sull'argomento, e da essa hanno poi attinto tutti i compilatori. Solo quarant'anni dopo la sua pubblicazione la teoria delle approssimazioni ha subìto una importante modificazione, e ciò nel lavoro, già accennato, del Com.te GUYOU.

(3) Veggasi *Sull'ordine delle cifre di un numero decimale*, " Periodico di Matematica ", Anno X, fasc. I. Fra le semplificazioni derivanti da questa definizione abbiamo ripetutamente esperimentato essere utilissima quella che riguarda la divisione fra due numeri decimali. Così, p. es., dovendo dividere 0,00626378 per 1627,3, oppure 5853,8 per 0,027, si vede subito, senz'altro, che la prima cifra del quoziente nel primo caso (3) è dell'ordine -6, e nel secondo caso (2) è dell'ordine $+5$. Dalla *Aritmetica* si hanno invece diverse regole, non sempre semplici nè sempre chiare, tanto che la loro applicazione è sempre penosa ed è spesso causa di incertezze e di errori.

si possano calcolare colla approssimazione che si trova essere necessaria). Lo svolgimento di questo capitolo è identico a quello del precedente ed è minuziosamente accurato. Una prova di questa minuziosa cura si ha nell'ultimo §. dove si considera l'operazione, che rende razionale il denominatore di una frazione, dal punto di vista dei calcoli approssimati; e si osserva, per es., che sarebbe dannoso, anzichè vantaggioso, sostituire la seconda alla prima delle due espressioni

$$\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, \qquad \frac{(1+\sqrt{2})\sqrt{\pi}}{\pi}.$$

Il quarto capitolo contiene le note regole per le operazioni abbreviate (moltiplicazione, divisione, estrazione di radice quadrata e anche estrazione di radice cubica): vi notiamo solo che il ragionamento che segue gli esempi della moltiplicazione e della divisione, è piuttosto una *giustificazione* della regola, anzichè (come dice l'A.) una *dimostrazione* [1].

L'ultimo capitolo è forse quello che è meno pregievole. L'A. comincia coll'accennare alla semplicità, che si potrebbe introdurre in molte dimostrazioni colla considerazione dei numeri negativi; e ciò perchè egli ha voluto serbare ai quattro capitoli precedenti un carattere strettamente aritmetico. Ma a noi pare che questo procedimento sia inutile e dannoso: inutile perchè la teoria delle approssimazioni non si insegna certo a chi non conosce gli elementi dell'*Algebra* [2], dannoso, perchè in qualche punto richiede delle prolissità, le quali (come già accennammo parlando del secondo capitolo) nuòcciono alla chiarezza. Segue l'esposizione, in forma generale, del metodo del Guyou: e qui crediamo che sarebbe opportuno un maggiore sviluppo, specialmente per ciò che riguarda la soluzione del secondo problema.

Concludendo però, diremo che il lavoro del sig. Fassbinder è semplice, chiaro ed elementare, e che, se vi fossero introdotte le poche e leggiere modificazioni accennate, non lascierebbe a desiderare di meglio.

G. Pesci.

Sammlung Göschen. — Leipzig. - N. 41. Mahler. *Ebene Geometrie.* — N. 72. Doehlemann. *Projektive Geometrie.*

La collezione Göschen ha molta analogia con l'ottima raccolta dei manuali Hoepli e con la biblioteca degli studenti del Giusti. Si compone di volumetti di 160 a 200 pagine, elegantemente legati in tela al prezzo di 80 pfennig (L. 1); in ciascuno dei quali si trova una rapida, chiara e facilmente intelligibile esposizione delle parti fondamentali di una data scienza o di una parte di essa, in guisa da servire come ottimo avviamento allo studio di opere più voluminose e perfette.

La collezione è prossima ad avere 300 volumi, dei quali una quarantina si riferiscono alle matematiche.

Abbiamo sott'occhio la 4ª edizione della geometria piana e la 3ª edizione della geometria proiettiva, recentemente pubblicate.

---

(1) A proposito della teoria delle approssimazioni numeriche e delle operazioni abbreviate, a noi pare che, per la pratica, sarebbe molto necessario considerare anche quest'altra questione: *conoscendo l'approssimazione dei dati, in che modo si devono eseguire le ordinarie operazioni per non arrivare, nei risultati, a un'approssimazione illusoria?* Questo problema, si può osservare, è implicitamente compreso nel primo dei due problemi fondamentali; ma a noi pare tanto importante, che dovrebbe essere studiato a sè, e che le semplici regole, che, nei casi ordinari, si possono trovare per la sua soluzione, dovrebbero costituire un capitolo dell'*Aritmetica pratica*. Nel caso in cui gli errori che affettano i dati siano quelli soltanto che derivano dall'arrotondamento dell'ultima cifra (che è il caso più frequente e al quale si possono ricondurre tutti gli altri) demmo già, noi stessi, delle regole per le quattro operazioni fondamentali e le applicammo alle operazioni occorrenti per l'ordinaria interpolazione (*Sulle operazioni fra numeri decimali approssimati*... "Periodico di matematica„. Vol. XIX, fasc. VI e Vol. XX, fasc. I e II). Facciamo notare che per l'applicazione di queste nostre regole non occorre affatto eseguire le operazioni in modo diverso dal solito (meno, nella moltiplicazione, l'inversione dell'ordine dei prodotti parziali; inversione che si può seguire anche nell'*Aritmetica Elementare* (v. Baltzer) e che, del resto, tutti fanno quando eseguiscono la interpolazione diretta in una tavola logaritmo-trigonometrica, avente le solite tavolette ausiliarie); e questo ci pare un vantaggio notevole, chè le regole per le operazioni abbreviate sono poco semplici, e (se non si ha l'occasione di applicarle spesso) si dimenticano facilmente.

(2) Se così fosse, non si potrebbe neppure adottare l'accennata definizione generale di ordine di una cifra decimale; ma così non è, e l'esame dei programmi delle scuole francesi ce lo ha dimostrato.

Nella prima notiamo anzitutto una novità tipografica. Le figure sono stampate a due colori; in nero le linee fondamentali, in rosso le secondarie. Questa disposizione rende le figure molto chiare e nitide; ma non è senza inconvenienti.

Infatti talvolta la sovrapposizione non è perfetta ed allora la chiarezza sparisce; questo inconveniente sembra si sia manifestato maggiormente nelle figure più complesse della geometria proiettiva, poichè nella 3ª edizione di questo trattatello si è stimato conveniente ritornare al vecchio sistema e stampare le figure soltanto in nero.

Per dare un' idea del contenuto, riportiamo sommariamente l'indice delle due operette.

Mahler - *Ebene Geometrie.*

I. Sezione: Simmetria e congruenza. — Cap. I. Il circolo - Luoghi geometrici. — II. L'angolo. — III. Delle figure in generale. — IV. Simmetria centrale — V. Simmetria assiale. — VI. Congruenza. — VII. Il parallelogrammo ed il trapezio. — VIII. Il circolo. — IX. Poligoni regolari. — X. Equivalenza.

II. Sezione: Similitudine — Cap. XI. Segmenti proporzionali determinati da parallele. — XII. Segmenti proporzionali determinati da trasversali. — XIII. Similitudine dei poligoni. — XIV. Misura delle figure rettilinee. — XV. Misura del circolo.

III. Sezione: Problemi geometrici. — Cap. XVI. Natura dei problemi e modo di trattarli.

Doehlemann - *Projektive Geometrie*

I. Sezione: Relazioni prospettive delle forme fondamentali. — II: Forme armoniche. — III: Le relazioni proiettive delle forme di prima specie. — IV: Relazioni proiettive sullo stesso sostegno. — V: La conica generata da forme proiettive fondamentali di prima specie. — VI: La teoria delle polari rispetto ad una conica. — VII: Le superficie coniche e rigate di second'ordine determinate da forme proiettive.

Laisant. — *Initiation mathématique.* Ouvrage étranger a tout programme dédié aux amis de l'enfance. Genève, Georg — Paris, Hachette — 1906.

" Coloro per i quali la parola " istruire „ è sinonimo d' " annoiare „ e talvolta " di " torturare „ sono veri malfattori pubblici. È tempo che il loro dominio ne" fasto prenda fine „. Con queste parole l'illustre autore esprime il concetto che l'ha guidato nel comporre quest'aureo libretto, nel quale egli ha raccolto una grande quantità di cognizioni matematiche, apparentemente disparate, ma in realtà collegate da un filo logico, scelto con molto acume, alle quali gli educatori dell'infanzia potranno attingere largamente per istruire i bambini, divertendoli, e per fare germogliare nei loro giovani cervelli, senza alcuno sforzo, i germi di nozioni matematiche assai elevate.

Soprattutto, dice l'A. ai maestri, procurate di divertire il fanciullo, *non gli fate imparar nulla a memoria*, e a 11 anni, se è d'intelligenza media, comprenderà le matematiche meglio che i nove decimi dei nostri baccellieri. Quel che più interessa si è che egli ci avrà preso gusto e avrà piacere a intraprenderne lo studio.

Non si creda con questo che il nuovo libro del Laisant sia da confondersi con uno dei molti libri, alcuni anche ottimi, di *ricreazioni matematiche* che già esistono. Questi richiedono di solito una discreta cultura matematica precedente, e applicano tali nozioni alla risoluzione di quistioni divertenti. Invece in quello sono raccolte con molta diligenza delle quistioni dilettevoli, che vengono adoperate come mezzo pedagogico per destare la curiosità dei bambini e fare entrare nelle loro menti i germi di molte cognizioni matematiche, alcuna delle quali assai elevate.

Con quali mezzi il Laisant abbia raggiunto lo scopo sarebbe troppo lungo dire qui; ci limiteremo a dire che tutti i rami della matematica sono stati messi a contribuzione, che il libro è scritto con molta semplicità e spigliatezza, che invogliano a leggere; e ad esprimere il voto che tutti coloro che si sono dedicati all'educazione e all'istruzione dell'infanzia, lo meditino per il bene dei bambini affidati alle loro cure.

K.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 24 aprile 1906

AL

PERIODICO DI MATEMATICA

		Italia	Estero
Periodico di matematica	L.	8	9
Supplemento al Periodico di matematica . . .	„	2	2,50
Periodico e Supplemento	„	9,50	11

Non si fanno altro che abbonamenti annui decorrenti dal 1° luglio al 30 giugno dell'anno successivo.

Per accordi presi col Presidente dell'Associazione " Mathesis „ i signori soci di quest'Associazione potranno avere l'abbonamento al *Periodico di Matematica* al prezzo di L. **6** (in aggiunta alla quota sociale, pure di L. 6), **pagato anticipatamente** al Segretario dell'Associazione, prof. **Gaetano Riboni**, *Via Vittoria 53, Milano.*

AVVISO

Presso la Sig.ra **PIA PADERNI ved. LUGLI, via Agostino Depretis n. 86, Roma,** trovansi vendibili, legate in volumi, le serie complete del *Periodico*, dal 1° a tutto il 10° anno al prezzo ridotto di **Lire 50** all'interno e di **Franchi 60** in oro, per gli Stati dell'Unione Postale; e le annate complete separate, pure rilegate in volumi dal 3° al 10° anno, nonchè i fascicoli sciolti dei suddetti anni, a prezzi da convenirsi.

Le annate dalla 11a alla 20a (1896-1905) del *Periodico di Matematica* si trovano in vendita presso la direzione al prezzo di **L. 6** per l'interno e di **L. 7** per l'estero, le prime tre, e di **L. 8** per l'interno e **L. 9** per l'estero le altre.

dell'Esposizione Internazionale di Milano 1906

Per iniziativa del noto periodico, *Il Monitore Tecnico*, e sotto i suoi auspicî, la Società Editrice Tecnico-Scientifica di Milano pubblicherà una apposita Rivista illustrata dell'Esposizione, la quale sarà edita fra il maggio ed il dicembre di quest'anno sotto il titolo speciale di: **Rassegna Tecnica dell'Esposizione Internazionale di Milano 1906.**

Tale pubblicazione comprenderà almeno venti fascicoli, ciascuno circa di quaranta pagine di testo nel formato di cent. 21 × 31 tutti riccamente illustrati colla riproduzione di nitidi disegni e di interessanti fotografie e con copertina artistica policroma, riproducente un geniale disegno del Dudovich.

Ciascun fascicolo sarà dedicato ad una determinata specialità della mostra e costituirà come una speciale monografia a sè, mentre il complesso dei varî fascicoli costituirà una rassegna tecnica armonica e completa della importante manifestazione artistica ed industriale.

Detta **Rassegna** tratterà i seguenti punti principali:

Per la parte descrittiva generale dell'Esposizione: Cenni generali sulla Mostra — Gli Edifici della Esposizione dal lato costruttivo ed architettonico — Galleria del Sempione — Impianti tecnici generali dell'Esposizione.

Per la parte descrittiva delle singole mostre: Strade ordinarie — Automobilismo e Ciclismo — Strade Ferrate (Corpo stradale - Armamento e Segnali) — Materiale mobile ferroviario — Trazione elettrica ferroviaria e tramviaria — Tramvie e ferrovie speciali — Legislazione, amministrazione ed economia ferroviaria — Areonautica — Telegrafia — Telefonia — Nave mercantile e Nave da guerra (Costruzione della nave - Impianti e servizi speciali - Apparecchi motori) — Costruzione, impianti ed arredamenti portuali — Fari — Segnalazioni marittime — Navigazione fluviale — Architettura — Arte decorativa — Igiene — Assistenza — Previdenza — Galleria del lavoro — Agraria — Industria e macchine agricole — Bonifiche e irrigazione — Metrologia — Mostre diverse e temporanee — Varietà — Concorsi e Congressi tecnici.

Per tale pubblicazione il *Monitore Tecnico* si è assicurata la collaborazione di una eletta schiera di tecnici, i quali si occuperanno di trattare le diverse materie comprese nei successivi fascicoli suddividendosi il lavoro in rapporto alla particolare competenza di ciascuno nei varî rami di tecnicismo speciale; e i nomi di questi collaboratori costituiscono la garanzia migliore del valore tecnico-scientifico che la nuova pubblicazione dovrà radunare.

I venti fascicoli saranno posti separatamente in vendita al prezzo di almeno L. 1,50 cadauno — prezzo che potrà aumentare per i fascicoli di maggior mole — e l'abbonamento al complesso dei venti fascicoli viene aperto al prezzo di L. 20 nel Regno e L. 25 per l'estero.

PERIODICO DI MATEMATICA

PER

L' INSEGNAMENTO SECONDARIO

fondato da DAVIDE BESSO, continuato da AURELIO LUGLI

ED ATTUALMENTE DIRETTO

DAL

PROF. GIULIO LAZZERI

SERIE III — VOLUME III

SOMMARIO:

LIVORNO

TIPOGRAFIA RAFFAELLO GIUSTI

1906

ALASIA. — *Sui determinanti ed i caratteri di alcuni gruppi.* (Rivista di Fisica, Matematica e Scienze Naturali. Pavia, 1906).

AMODEO. — *I trattati delle sezioni coniche da Apollonio a Simson.* (Annali del R. Istituto tecnico di Napoli. Anno XXIII, 1905.)

— — *Sul corso di storia delle scienze matematiche nella R. Università di Napoli.* (Bibliotheca mathematica, 1906.)

ANDREINI. — *Intorno alla teoria e costruzione degli orologi solari secondo il sistema orario babilonese, italico e giudaico.* (Rivista di Fisica, Matematica e Scienze Naturali. Pavia, 1906.)

ARZELÀ. — *Condizioni di esistenza degli integrali nelle equazioni a derivate parziali.* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1906.)

BERZOLARI. — *Sulle curve gobbe razionali dotate di piani stazionari singolari.* (Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, 1906.)

CHINI. — *Sulle superficie* W *applicabili sopra una superficie di rotazione.* (Idem, 1906).

CIANI. — *Sopra la configurazione del pentaedro.* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1906.)

— — *Le curve razionali di sesto ordine invarianti rispetto a gruppi finiti di collineazioni quaternarie.* (Rend. del R. Istituto Lombardo, 1906.)

DUCCI. — *Note bibliografiche.* (Rivista di Fisica, Matematica e Scienze Naturali. Pavia, 1906.)

GALLUCCI. — *Risoluzione del problema dei tetraedri ipèrbolidici.* (Rendiconti della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, 1905.)

— — *Studio della figura delle otto rette e sue applicazioni alla geometria del tetraedro ed alla teoria delle configurazioni.* (Idem, 1906.)

— — *La mente di Bruno.* (Biblioteca del libero pensiero. N. 2. Napoli, 1906.)

GELIN. — *Traité de trigonométrie plane et sphérique.* Deuxième édition. Namur. Wesmael-Charlier, 1906.

— — *Formules relatives à l'angle de Brocard et exercices sur les lignes trigonométriques de l'arc de 3°.* (Idem, 1906.)

LANDAU. — *Ueber das Nichtverschwinden einer Dirichletschen Reihe.* (Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. 1906.)

LEBON. — *Théories et construction de tables permettant de trouver rapidement les facteurs premiers d'un nombre.* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1906.)

— — *Table de caractéristiques relatives à la base 2310 des facteuvs premièrs d'un nombre inférieur à 30030.* Paris, Delalain frères, 1906.

MARCOLONGO. — *Sugli integrali delle equazioni dell'elettrodinamica.* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. 1906.)

— — *Sul teorema della composizione delle rotazioni istantanee.* Appunti per la storia della meccanica nel secolo XVIII. (Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche, 1906.)

NICCOLETTI. — *Su un teorema di Kronecker della teoria dei determinanti.* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1906.)

ORTU-CARBONI. — *Per una grave quistione attuariale.* (Rivista di ragioneria di Roma, 1906.)

PALATINI. — *Sulle superficie algebriche i cui* S_h *(h + 1)-secanti non riempiono lo spazio ambiente.* (Accademia Reale di Torino, 1906.)

PASCAL. — *Sulla equivalenza di due sistemi di forme differenziali multilineari e su quella di due forme differenziali complete di 2° ordine.* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1906.)

PEANO. — *Super theorema de Cantor-Bernstein.* (Idem, 1906.)

PIERI. — *Sur la compatibilité des axiomes de l'aritmétique.* (Revue de Métaphisique et de morale, 1906.)

SCARPIS. — *Il teorema di Wilson nella teoria dei gruppi d'operazioni.* (Giornale di Battaglini, 1906.)

SEZIONI CONICHE

(Continuazione e fine v. fasc. precedente)

L'iperboloide di rotazione ad una falda.

43. Sieno *d*, *u* due rette sghembe invariabilmente collegate fra loro, ed imaginiamo che la *u* ruoti compiendo un intero giro attorno a *d*. Essa genera una superfice che si chiama iperboloide di rotazione ad una falda.

Sia DU il segmento perpendicolare in D a *d* ed in U ad *u*, e *v* la retta simmetrica di *u* rispetto al piano *d*U. Ogni piano π_1 perpendicolare a *d* taglia *d*, *u*, *v* in tre punti D_1, U_1, V_1; e per la simmetria delle rette *u*, *v* si ha $D_1U_1 = D_1V_1$, e quindi U_1, V_1 appartengono ad uno stesso circolo di centro D_1. Ciò prova che le due rette *u*, *v* rotando attorno a *d* generano la medesima superficie. È poi manifesto che le due rette *u*, *v* hanno per proiezione sul piano π perpendicolare in D alla *d* la stessa tangente al circolo che ha per raggio DU.

In seguito a queste considerazioni si può stabilire la seguente

Definizione. — *Chiamasi* **iperboloide di rotazione ad una falda** *il luogo delle rette* u, v *che hanno per proiezione sopra un piano* π *le tangenti di un circolo* c, *fanno con tale proiezione un angolo costante e incontrano il suddetto circolo. Il circolo* c *si chiama* **circolo di gola** *dell'iperboloide; le rette* u, v *si dicono* **generatrici** *e la retta* d *perpendicolare a* π *nel centro di* c *si dice* **asse dell'iperboloide**.

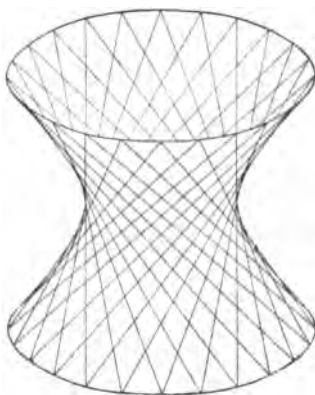



Fig. 32.

Da questa definizione discendono i seguenti

Teoremi — 1°. *Ogni piano* π_1 *perpendicolare all'asse* d *taglia l'iperboloide secondo un circolo, il cui raggio cresce col crescere della distanza di* π_1 *dal piano del circolo di gola.*

2°. *Per ogni punto del circolo di gola passano due generatrici dell'iperboloide.*

3°. *Le generatrici dell'iperboloide si possono aggruppare in due sistemi* u_1, v_1. *Due generatrici dello stesso sistema non s'incontrano, due generatrici di diverso sistema s'incontrano.*

Sieno A_1, A_2, due punti del circolo di gola, a_1, a_2 le tangenti ad esso in due punti: p la perpendicolare a π nel punto a_1a_2, u_1, v_1 le generatrici che passano per A_1 e u_2, v_2 le generatrici che passano A_2. Essendo queste quattro generatrici egualmente inclinate su π, i quattro trilateri u_1a_1p, v_1a_1p, u_2a_2p, v_2a_2p sono eguali; ed essendo due di questi trilateri da una parte e due dall'altra del piano π, una generatrice u_1 dovrà incontrare una generatrice v_2, ma non la u_2 e v_1 dovrà incontrare la u_2 ma non la v_2.

4°. *Due generatrici di diverso sistema giacciono in un piano.*

5°. *Per ogni punto* P *di una generatrice* u *di un sistema passa una generatrice* v *dell'altro sistema.*

Infatti la retta simmetrica di u rispetto al piano dP è evidentemente una generatrice v.

6°. *In ogni piano che contiene una generatrice* u *di un sistema giace una retta* v *dell'altro sistema.*

Infatti un piano σ contenente una generatrice u deve tagliare il piano π secondo una retta che passa per il punto A d'incontro di u col circolo di gola c, e quindi deve tagliare c in un altro punto A' o essere tangente a c. Nel primo caso per A' deve passare una generatrice v' che incontrando u deve giacere in σ; nel secondo caso σ è il piano proiettante di u su π, e deve contenere anche la v che passa per A.

44. Teorema. — *Ogni retta che non sia una generatrice ha in comune coll'iperboloide due, uno o nessun punto.*

Sia r una retta che non sia una generatrice dell'iperboloide. Se essa incontra in P una generatrice u, il piano ru deve contenere una generatrice v dell'altro sistema, la quale perciò incontra u in un punto P', che può essere coincidente con P o distinto da P. Se questo punto coincide con P, la r non può avere altri punti comuni con la superficie, perchè se ne avesse un altro P'' dovrebbero per P'' passare una retta u' ed una v', che incontrando v ed u rispettivamente giacerebbero nel piano ru, il che è assurdo. Se P' è distinto da P, la r incontra l'iperboloide in questi due punti, e non può incontrarlo in altri, perchè se esistesse un terzo punto d'incontro P'', la generatrice v'' condotta per P'' incontrando la u giacerebbe in ru, e quindi incontrerebbe anche la v; e ciò è assurdo.

Si possono poi avere rette che non incontrano la superficie. Ne è un esempio ogni retta di π esterna al circolo di gola.

Definizione. — *Ogni retta che incontra l'iperboloide in un sol punto si dice tangente ad esso.*

Corollari. — 1°. *Il luogo delle tangenti in un punto ad un iperboloide è il piano delle due generatrici che passano per quel punto, e si dice piano tangente in quel punto.*

2°. *Ogni piano che contiene una generatrice è tangente all'iperboloide.*

45. Teorema. — *Un iperboloide si può imaginare come luogo dalle rette che si appoggiano a tre sue generatrici di un sistema.*

Siano u_1, u_2, u_3 tre generatrici di un sistema dell'iperboloide. Ogni generatrice v dell'altro sistema deve incontrare u_1, u_2, u_3. Viceversa per ogni punto P_1 di u_1 passa una sola retta (intersezione dei piani Pu_2, Pu_3) che incontra le u_2, u_3 ed è la generatrice v che passa per P.

46. Teorema. — *Esistono due sfere inscritte nell'iperboloide (cioè tangenti a tutte le sue generatrici) e ad un piano dato π non parallele all'asse.*

Sia d' la proiezione dell'asse d dell'iperboloide sul piano dato π, A uno dei punti d'incontro di d' coll'iperboloide, u una delle generatrici passanti per A. I piani perpendicolari al piano $d'u$ condotti per le bisettrici degli angoli delle rette d', u costituiscono il luogo dei punti equidistanti da queste rette e tagliano d in due punti C_1, C_2 rispettivamente, pure equidistanti da d', u; perciò le sfere di centro C_1 o C_2 e di raggio eguale alla distanza di questo punto da d' e da u sono tangenti a d' (e quindi al piano π) e alla generatrice u. Ne risulta che esse sono tangenti anche a tutte le generatrici del sistema di u e per ragioni di simmetria anche a quelle dell'altro sistema.

47. Teorema. — *La sezione prodotta in un iperboloide da un piano π non parallelo all'asse è una ellisse od una iperbole, che ha per fuochi i punti di contatto di π colle sfere inscritte nell'iperboloide e tangenti a π, ed ha per direttrici le rette d'intersezione di π coi piani dei circoli di contatto delle sfere suddette coll'iperboloide.*

1°. Siano F_1, F_2 i punti di contatto delle sfere suddette S_1, S_2 con π, P un punto qualunque della sezione prodotta da π nell'iperboloide, Q_1, Q_2 i punti d'incontro della generatrice u dell'iperbo-

loide, condotta per P, coi due circoli di contatto delle sfere S_1, S_2 coll' iperboloide.

Poichè i segmenti tangenti condotti da un punto ad una sfera sono eguali, si ha

$$PF_1 = PQ_1, \; PF_2 = PQ_2,$$

e quindi

$$PF_1 \pm PF_2 = PQ_1 \pm PQ_2 = Q_1Q_2,$$

dove s' intende preso il segno + o — secondo che P è interno o esterno al segmento Q_1Q_2.

Dunque la sezione è un ellisse o un iperbole poichè il segmento Q_1Q_2 è costante al variare di P sulla curva.

2°. Siano γ_1, γ_2 i piani paralleli condotti per i circoli di contatto di S_1, S_2 coll' iperboloide, α il piano condotto per l'asse perpendicolare a π e poniamo $\gamma_1\pi = d_1$, $\gamma_2\pi = d_2$, $\alpha d_1 = D_1$, $\alpha d_2 = D_2$. Tracciamo anche per il punto P il piano γ parallelo a γ_1, γ_2 e sia $H = \gamma\alpha\pi$.

Chiamando δ_1, δ_1' le distanze di P dal fuoco F_1 e dalla retta d_1, si ha, $\delta_1 = PF_1 = PQ_1$, $\delta'_1 = HD_1$.

Si ha dunque (per il teor. di Talete)

$$\frac{\delta_1}{\delta'_1} = \frac{PQ_1}{HD_1} = \frac{Q_1Q_2}{D_1D_2},$$

e siccome Q_1Q_2 è costante al variare di P sulla curva, si ha che d_1 è la direttrice corrispondente al fuoco F_1.

L'esagono gobbo ed i teoremi di Pascal e di Brianchon.

48. Definizione. — *Siano u_1, u_2, u_3 tre rette sghembe fra loro due a due, e v_1, v_2, v_3 tre rette che si appoggiano ad esse, e perciò sono pure sghembe due a due. Queste sei rette prese in un ordine determinato, in modo che le* u *si alternino colle* v, *formano una figura che si dice* **esagono gobbo**. *I 6 punti d'incontro di due rette consecutive si dicono* **vertici** *e i 6 piani di due rette consecutive si dicono* **facce** *dell'esagono gobbo.*

Scelto per es. l'ordine $u_1v_1u_2v_2u_3v_3$, le tre coppie di vertici e facce

$$u_1v_1, \; v_2u_3; \qquad v_1u_2, \; u_3v_3; \qquad u_2v_2, \; v_3u_1$$

sono opposte.

Teorema. — *Le tre rette congiungenti i vertici opposti di un*

Teorema. — *Le tre rette d'intersezione dei piani opposti di un*

esagono gobbo sono le intersezioni dei piani determinati dalle coppie di rette dell'esagono che non sono facce del medesimo, e quindi passano per un punto.

La congiungente i punti

u_1v_1, v_2u_3 giace nei piani u_1v_2, v_1u_3
v_1u_2, u_3v_3 » » v_1u_3, u_2v_3
u_2v_2, v_3u_1 » » u_2v_3, v_2u_1

perciò queste tre congiungenti passano per il punto d'incontro dei tre piani u_1v_2, v_1u_3, u_2v_3.

esagono gobbo, sono le congiungenti dei tre punti comuni alle rette dell'esagono che non sono vertici del medesimo, e perciò giacciono in un piano.

La retta comune ai piani

u_1v_1, v_2u_3 passa per i punti u_1v_2, v_1u_3
v_1u_2, u_3v_3 » » v_1u_3, u_2v_3
u_2v_2, v_3u_1 » » u_2v_3, v_2u_1

perciò queste tre rette d'intersezione stanno nel piano che passa per i tre punti u_1v_2, v_1u_3, u_2v_3.

49. TEOREMA DI BRIANCHON. — *Le tre rette congiungenti i vertici opposti di un esalatero circoscritto ad un circolo, passano per un punto (detto* PUNTO DI BRIANCHON).

TEOREMA DI PASCAL. — *I tre punti d'incontro dei lati opposti di un esagono inscritto in un circolo sono situati sopra una retta (detta* RETTA DI PASCAL).

Sia $U_1V_1U_2V_2U_3V_3$ un esagono inscritto in un circolo e $u'_1v'_1u'_2v'_2u'_3v'_3$ l'esalatero circoscritto formato dalle rispettive tangenti in quei punti. Voglio dimostrare che le coppie di rette U_1V_2, V_2U_3; V_1U_2, U_3V_3; U_2V_2, V_3U_1 s'incontrano in tre punti situati in linea retta e le congiungenti i vertici $u'_1v'_1$, $v'_2u'_3$; $v'_1u'_2$, $u'_3v'_3$; $u'_2v'_2$, $v'_3u'_1$ passano per un punto. Essendo d la perpendicolare al piano σ del circolo c condotto per il suo centro O, u una retta perpendicolare in U ad un suo raggio OU non situata nel piano del circolo c nè parallela a d, si consideri l'iperboloide che ha d per asse e u per generatrice, iperboloide che taglia σ nel circolo c; e siano u_1, u_2, u_3 le generatrici di un sistema di questo iperboloide che passano per U_1, U_2, U_3 e v_1, v_2, v_3 le generatrici dell'altro sistema che passano per V_1, V_2, V_3 rispettivamente.

Se proiettiamo questo esagono gobbo sul piano σ ortogonalmente (cioè dal punto all'∞ di d) otteniamo come proiezioni delle sei generatrici u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, le sei tangenti del circolo c nei punti U_1, V_1, U_2, V_2, U_3, V_3, cioè u'_1, v'_1, u'_2, v'_2, u'_3, v'_3, come proiezioni dei punti (u_1v_1) ecc. otteniamo i punti $(u'_1v'_1)$ ecc. E siccome le rette congiungenti le coppie di punti (u_1v_1), (v_2u_3); (v_1u_2), (u_3v_3); (u_2v_2), (v_3u_1) passano per un punto, passeranno pure per un punto le rette che uniscono i vertici opposti dell'esalatero circoscritto $u'_1v'_1u'_2v'_2u'_3v'_3$.

Se tagliamo l'esagono gobbo con σ, otteniamo come sezione

del piano u_1v_1 la retta U_1V_1
» v_1u_2 » V_1U_2
» u_2v_2 » U_2V_2
» v_2u_3 » V_2U_3
» u_3v_3 » U_3U_3
» v_3u_1 » V_3U_1.

Dunque le coppie di lati opposti U_1V_1, V_2U_3; V_1U_2, U_3V_3; U_2V_2, V_3U_1 s'incontrano nei tre punti ove le rette comuni alle facce opposte dell'esagono gobbo considerato incontrano σ, e siccome queste tre rette giacciono in un piano, i punti suddetti sono sulla retta comune a quel piano e al piano σ.

50. I ragionamenti precedenti sussistono anche nel caso in cui un vertice dell'esagono inscritto coincide col successivo. Se per esempio U_1, V_1 coincidono, le due generatrici u_1, v_1 dell'iperboloide che passano per essi individuano il piano che le proietta sulla tangente al circolo di gola in quel punto, cosicchè il lato U_1V_1 diventa la tangente al detto circolo nel punto U_1, e similmente i due lati u'_1, v'_1 dell'esalatero circoscritto vengono a coincidere ed il punto $(u'_1v'_1)$ viene a coincidere col punto (u_1v_1) cioè col punto di contatto della retta u' (o v') col circolo di gola.

Tenendo conto di queste considerazioni possiamo enunciare i seguenti teoremi, che si dimostrano in modo perfettamente identico ai due precedenti.

1°. *Se un pentalatero è circoscritto ad un circolo, la congiungente un vertice col punto di contatto del lato opposto e le congiungenti i due vertici appartenenti a questo lato con gli altri due vertici ad essi rispettivamente non consecutivi, concorrono in un punto.*

1°. *Se un pentagono è inscritto in un circolo, il punto d'incontro di un lato colla tangente nel vertice opposto e i due punti d'incontro dei lati concorrenti in questo vertice coi rimanenti lati ad essi rispettivamente non consecutivi sono in linea retta.*

La dimostrazione si ricava da quella del teorema precedente supponendo che U_1 coincida con V_1, ma gli altri vertici siano tutti distinti.

2°. *Se un quadrilatero è circoscritto ad un circolo, le due rette congiungenti i vertici opposti e le due rette congiungenti i punti di contatto dei lati opposti passano per un punto.*

2°. *Se un quadrangolo è inscritto in un circolo, i due punti d'incontro dei lati opposti, e i due punti d'incontro delle tangenti nei vertici opposti stanno in linea retta.*

Se ABCD è il quadrangolo inscritto, si supponga dapprima che U_1 e V_1 coincidano con A, U_2 con B, V_2 e U_3 con C, e V_3 con D, ed avremo che il punto d'incontro delle tangenti in A, C giace sulla retta determinata dai punti d'incontro dei lati opposti del quadrangolo ABCD. Supponendo poi che U_1 e V_1 coincidono con B, U_2 con C, V_2 e U_3 con D e V_3 con A, si dimostra che su questa retta giace anche il punto d'incontro delle tangenti in B, D. Ecc.

3°. *Se un quadrilatero è circoscritto ad un circolo, la congiungente due vertici opposti e le due rette congiungenti i punti di contatto de' due lati concorrenti in uno di questi vertici, coi due vertici rimanenti, passano per un punto.*

3°. *Se un quadrangolo è inscritto in un circolo, il punto d'incontro di due lati opposti e i due punti d'incontro delle tangenti nei vertici situati sopra uno di questi lati con i due lati rimanenti che non passano per essi, stanno in linea retta.*

Se ABCD è un quadrangolo inscritto, supponendo che U_1, V_1 coincidano con A, U_2, V_2 con B, U_3 con C, V_3 con D, dal ragionamento del § 49 si deduce che i tre punti d'incontro della tangente in A con BC, della tangente in B con AD e dei lati AB, CD, stanno in linea retta. Ecc.

4°. *Se un trilatero è circoscritto ad un circolo, le tre rette congiungenti i vertici coi punti di contatto dei lati opposti passano per un punto.*

4°. *Se un triangolo è inscritto in un circolo, i tre punti d'incontro dei lati colle tangenti nei vertici rispettivamente opposti stanno in linea retta.*

Essendo A, B, C i vertici del triangolo inscritto si supponga che U_1 e V_1 coincidano con A, U_2 e V_2 con B, U_3 e V_3 con C e si ripeta la dimostrazione del § 49.

51. I teoremi dei §§ 49, 50, possono essere estesi ad una sezione conica qualunque. Infatti sia c una sezione conica, situata in un piano π, c' il circolo sezione del cono a cui appartiene c fatta con un piano π' perpendicolare all'asse. La curva c è la proiezione del circolo c' su π fatta dal vertice V del cono, e ogni poligono inscritto o circoscritto a c è evidentemente proiezione di un altro poligono inscritto o circoscritto a c'.

Se per esempio consideriamo un esagono inscritto a c e l'esagono corrispondente inscritto a c', i punti d'incontro dei lati opposti del primo sono le proiezioni dei punti d'incontro dei lati opposti del secondo, e perciò sono come questi in linea retta.

Possiamo dunque enunciare i seguenti teoremi:

1°. *Le tre rette congiungenti i vertici opposti di un esalatero circoscritto ad una conica passano per un punto.*

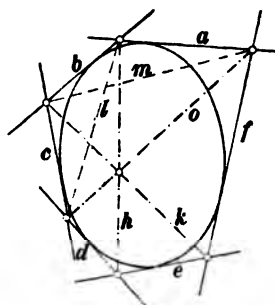



Fig. 33.

2°. *Se un pentalatero è circoscritto ad una conica, la congiungente un vertice col punto di contatto del lato opposto, e le congiungenti i due vertici appartenenti a questo lato con gli altri due vertici ad essi rispettivamente non consecutivi concorrono in un punto.*

3°. *Se un quadrilatero è circoscritto ad una conica, le due rette congiungenti i vertici opposti e le due rette congiungenti i punti di contatto dei lati opposti passano per un punto.*

4°. *Se un quadrilatero è circoscritto ad una conica, la congiungente due vertici opposti e le due rette congiungenti i punti di contatto dei due lati concorrenti in uno di questi vertici, coi due vertici rimanenti, passano per un punto.*

5°. *Se un trilatero è circoscritto ad una conica, le tre rette congiungenti i vertici coi punti di contatto dei lati rispettivamente opposti passano per un punto.*

1°. *I tre punti d'incontro dei lati opposti di un esagono inscritto in una conica sono situati sopra una retta.*

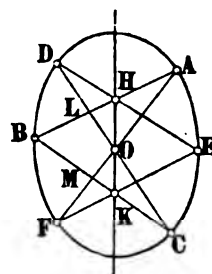



Fig. 34.

2°. *Se un pentagono è inscritto in una conica, il punto d'incontro di un lato colla tangente nel vertice opposto, e i due punti d'incontro dei lati concorrenti in questo vertice coi rimanenti lati ad essi rispettivamente non consecutivi sono in linea retta.*

3°. *Se un quadrangolo è inscritto in una conica, i due punti d'incontro delle coppie di lati opposti, e i due punti d'incontro delle coppie di tangenti nei vertici opposti stanno in linea retta.*

4°. *Se un quadrangolo è inscritto in una conica, il punto d'incontro di due lati opposti e i due punti d'incontro delle tangenti nei vertici situati sopra uno di questi lati con i due lati rimanenti che non passano per essi stanno in linea retta.*

5°. *Se un triangolo è inscritto in una conica, i tre punti d'incontro dei lati colle tangenti nei vertici rispettivamente opposti stanno in linea retta.*

G. Lazzeri.

SULL'USO E SULLE TAVOLE DEI VALORI NATURALI DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

(Continuazione e fine v. fasc. precedente)

---

12. Applichiamo ora tutti i risultati precedenti a una tavola di seni, tangenti e secanti, di 1′ in 1′ e con cinque cifre decimali.

Sia

$$f(x) = \operatorname{sen} x .$$

Per quanto si disse nel § 9, il massimo di G_d si ha per $x_0 + \Delta x = 90^\circ$, ma

$$\Delta x = \operatorname{arc} 1' = 0{,}00029 \cdot 08882 \cdot \ldots ,$$

da cui

$$\frac{\overline{\Delta x}^2}{8} = 0{,}00000 \cdot 00105 \cdot 7 \ldots ;$$

quindi, presa per cifra delle unità l'ultima cifra decimale della tavola, dal dal secondo membro della (15) si deduce che sarà certamente sempre

$$G_d < 0{,}0011 . \tag{37}$$

Dunque nella ricerca diretta di seno l'interpolazione è permessa sempre, perchè, non solo G_d è sempre minore di una mezza unità, ma è addirittura trascurabile rispetto ad L_d (§ 7).

Per la ricerca inversa si cominci col ricordare (§ 9) che G_i cresce al crescere di x_0 e tende all' ∞ al tendere di x_0 a $90^\circ - \Delta x$; poscia si osservi che, siccome la differenza $\operatorname{sen}(x_0 + \Delta x) - \operatorname{sen} x_0$, per la (13), diminuisce sempre, anche Δy generalmente diminuisce, e quindi L_i, per la (9), generalmente cresce. Ma, scorrendo la tavola, si vede che Δy è certamente minore di 2 per x maggiore di $87^\circ 50'$, quindi (non occorrendo l'interpolazione per Δy minore di 2) basta studiare come variano G_i ed L_i fino a questo valore di x. Per ciò, considerando separatamente l'intervallo in cui Δy (che al più è eguale a 30) ha sempre due cifre, e l'intervallo in cui Δy ha una sola cifra o è al più eguale a 10, si vede prima di tutto (scorrendo nuovamente la tavola) che è

$$\left.\begin{array}{lcr} 30 \geqslant \Delta y \geqslant 10 & \text{per} & x < 70^\circ 08' \\ 10 \geqslant \Delta y & \text{»} & 70^\circ 08' < x < 87^\circ 50' \end{array}\right\} ; \tag{38}$$

e che, corrispondentemente, dal secondo membro della (16) e dalla (19), si ha

$$\left.\begin{array}{rcl} G_i < 0''0061 & \text{e} & 2'' \leqslant L_i \leqslant 6'' \\ 0'',0060 < G_i < 0''0577 & \text{»} & 6'' \leqslant L_i \leqslant 30'' \end{array}\right\} ; \tag{38)'$$

Dunque anche nella ricerca inversa G_i è trascurabile rispetto ad L_i (§ 7).

Sarà utile, per il seguito, ricordare che le due limitazioni or ora indicate per L_i corrispondono rispettivamente ai casi in cui Δy abbia sempre due cifre, o generalmente una cifra.

OSSERVAZIONE I. — Quando l'interpolazione non occorre, e questo accade sempre per x maggiore di 87°50′ e può accadere fra 86°18′ e 87°50 (perchè Δy è eguale a 1, per la prima volta, per $x_0 = 86°18'$), il solo arrotondamento di $f(x)$ può evidentemente portare un errore maggiore di 30″.

OSSERVAZIONE II. — Dalla (15) e dalla (15)′ si ha che per $x = 89°59'30''$ è certamente

$$0{,}0010 < g_d < 0{,}0011\,;$$

e dalla (16) e dalle (16)′ si ha che per $x = 87°49'30''$ è certamente

$$0'',057 < g_i < 0''058\,;$$

quindi i limiti superiori G_d e G_i da noi trovati per g_d e g_i non potranno mai più subire un abbassamento sensibile, qualunque altra via si segua per la loro ricerca.

OSSERVAZIONE III. — A proposito delle limitazioni (38), veggasi N. § 42, Oss. III.

18. Sia

$$f(x) = \tan x\,.$$

Come si osservò nel § 10, G_d cresce sempre al crescere di x_0 e tende all'∞ al tendere di x_0 a $90° - \Delta x$; l'interpolazione non è dunque sempre permessa. Cercando fino a che valore sia permessa e osservando che, per essere $\Delta x = 1'$, basta far crescere x di 1′ per volta, dopo pochi tentativi dal secondo membro della (20) si deduce che, se

$$\left.\begin{array}{lll} x < 80°44'\,, & \text{si ha} & G_d < 0{,}500 \\ x > 80°44'\,, & \text{»}\ \text{»} & G_d > 0{,}502 \end{array}\right\}. \tag{39}$$

Dunque nella ricerca diretta di tangente l'interpolazione è permessa solo se x non supera 80°44′, perchè solo allora G_d è minore di una mezza unità dell'ultimo ordine (§ 7).

Per la ricerca inversa si cominci col ricordare (§ 10) che G_i cresce al crescere di x_0 e tende all'∞ al tendere di x_0 a $90° - \Delta x$; poscia si osservi che, siccome la differenza $\tan(x_0 + \Delta x) - \tan x_0$, per la (18), cresce sempre, Δy generalmente cresce, e quindi L_i, per la (9), generalmente cala e tende a zero. Ciò posto, supponiamo, per ora, che l'interpolazione si faccia solo per x minore di 80°44′, come nella ricerca diretta (§ 7), e studiamo come corrispondentemente variano G_i ed L_i. Per ciò si osservi (scorrendo la tavola) che, al variare di x da 0° a 80°44′, Δy varia da 29 a 1120 (gli estremi inclusi), e considerando separatamente l'intervallo in cui Δy ha due cifre sole o è al più eguali a 100, l'intervallo in cui Δy ha sempre tre cifre, e l'intervallo in cui Δy ha sempre quattro cifre, si vede prima di tutto che è

$$\left.\begin{array}{rcr} 29 \leqslant \Delta y \leqslant 100 & \text{per} & x < 57°21' \\ 100 \leqslant \Delta y < 1000 & \text{»} & 57°21' < x < 80°11' \\ 1000 < \Delta y \leqslant 1120 & \text{»} & 80°11' < x < 80°44' \end{array}\right\} \tag{40}$$

e che, corrispondentemente, dal secondo membro della (21), e della (9) si ha

$$\left.\begin{array}{rcr} G_i < 0'',0069 & \text{e} & 2'',07 > L_i \geqslant 0'',60 \\ 0'',0068 < G_i < 0'',0253 & \text{»} & 0'',60 \geqslant L_i > 0'',06 \\ 0'',0253 < G_i < 0'',0268 & \text{»} & 0'',06 > L_i \geqslant 0'',05 \end{array}\right\}. \tag{40'}$$

Esaminando questi risultati si vede che, per x minore di 57°21', G_i si può considerar trascurabile rispetto ad L_i; da 57°21' a 80°44' non è più così, ma G_i è sempre minore di L_i e, generalmente anche della metà di L_i (§ 7).

Anche qui sarà utile ricordare, per il seguito, che le tre limitazioni or ora indicate per L_i corrispondono rispettivamente ai casi in cui Δy abbia generalmente due cifre, o sempre tre, o sempre quattro.

Osservazione. — Dalla (20) e dalla (20)', dalla (21) e dalla (21)', si ha che per $x = 80°43'30''$ è certamente

$$0{,}49 < g_d < 0{,}50, \qquad 0'',026 < g_i < 0'',027;$$

quindi anche qui si può concludere come nella Oss. II al § precedente.

14. In questo § ci proponiamo di studiare a quali condizioni sarebbe possibile l'interpolazione nella ricerca diretta di tangente per x maggiore di 80°44'.

Prima di tutto si può osservare che, se si ammette che l'errore γ_d sia trascurabile anche quando, in valore assoluto, è solo minore di una unità, l'interpolazione può essere spinto fino a 82°38', perchè se

$$\left.\begin{array}{lll} x < 82°38' & \text{si ha} & G_d < 0{,}996 \\ x > 82°38' & \text{» »} & G_d > 1{,}002 \end{array}\right\}. \qquad (41)$$

Si può poscia osservare che, se si suppone l'arco dato affetto da un errore avente per massimo, in valore assoluto, ε'', l'interpolazione può essere spinta anche oltre i limiti indicati: fino a che, per es., G_d resta minore dell'errore prodotto nella tangente cercata dall'errore ε'' dell'arco [1]. Per ciò deve essere

$$G_d < \frac{\varepsilon''}{(\Delta x)''}[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)], \qquad (42)$$

ossia

$$G_d < \frac{\varepsilon'' \Delta x}{(\Delta x)''} f'(x_0 + \theta \Delta x).$$

Nel nostro caso, se si suppone che l'errore accennato sia solo quello che deriva dall'arrotondamento dell'arco ai decimi di secondo, si ha

$$\frac{\varepsilon''}{(\Delta x)''} = \frac{0{,}05}{60} = \frac{1}{1200};$$

inoltre si sa che

$$G_d = \frac{\overline{\Delta x}^2}{4} \cdot \frac{\tan(x_0 + \Delta x)}{\cos^2(x_0 + \Delta x)}, \qquad f'(x_0 + \theta \Delta x) = \frac{1}{\cos^2(x_0 + \theta \Delta x)},$$

quindi, perchè sia verificata la (42), basta che si abbia

$$\frac{\overline{\Delta x}^2}{4} \cdot \frac{\tan(x_0 + \Delta x)}{\cos^2(x_0 + \Delta x)} < \frac{\Delta x}{1200} \cdot \frac{1}{\cos^2 x_0},$$

ossia

$$\tan(x_0 + \Delta x) < \frac{1}{300\, \Delta x} \cdot \frac{1 + \cos 2(x_0 + \Delta x)}{1 + \cos 2x_0}: \qquad (43)$$

ed è facile vedere che questa è verificata fino ad $x_0 = 84°57'$. Nelle ipotesi fatte, si potrebbe dunque nella ricerca diretta di tangente, spingere l'interpolazione fino 84°58'.

---

(1) Crediamo che questo criterio potrebbe essere utile in pratica, onde stabilire convenientemente, per determinate specie di applicazioni e per determinate tavole, a che punto sia opportuno limitare l'interpolazione.

Si osservi finalmente che per l'intervallo nel quale (sempre nella ricerca diretta di tangente) non si può ammettere il principio delle parti proporzionali, sorge naturalmente l'idea di calcolare prima la tangente del complemento (chè allora l'interpolazione è, evidentemente, permessa) e poscia l'inversa del valore così ottenuto. Volendo però tenere conto esatto dell'errore che così risulterebbe in $\tan x$, in causa degli errori γ_d e λ_d che affettano la tangente del complemento, si trova facilmente che, se si tiene conto solo di γ_d, fino a 89°45′ quell'errore è certamente minore di 0,52, ma che, se si tiene conto anche di λ_d (1), il limite superiore inabbassabile di quell'errore fino da 80°, o da 85°, è già maggiore di 32, o di 130, unità. Questo artifizio dunque potrebbe produrre un errore molto maggiore di quello che si vuole evitare.

Si potrebbero allora cercare altri artifizî, come si fa pei logaritmi trigonometrici degli archi piccoli, ma a noi pare che nei casi in cui l'interpolazione nella ricerca del valor naturale di tangente non possa condurre alla approssimazione che si vuol raggiungere, convenga meglio ricorrere all'uso dei logaritmi.

15. In questo § ci proponiamo di vedere se l'interpolazione, nella ricerca inversa di tangente, è possibile per x maggiore di 80°44′ (§ 7, Oss.).

Dalla (21) si ricava, senz'altro, che per

$$80°44' < x < 89°30', \qquad 0'',0268 < G_1 < 0'',5169, \tag{44}$$

mentre che, corrispondentemente,

$$1124 \leqslant \Delta y \leqslant 369660, \qquad 0'',0534 > L_1 > 0'',0001; \tag{44'}$$

per cui, se si ammette che sia trascurabile un errore di mezzo secondo circa, l'interpolazione è lecita fino a 89°30′. Si noti che, al crescere di x, G_1 cresce, mentre L_1 cala fino a diventar trascurabile rispetto a G_1; contrariamente a quello che accade al decrescere di x (§ 13).

Per x maggiore di 89°30′, si può ricorrere a un artifizio analogo a quello accennato alla fine del § precedente; calcolare cioè l'inversa del valore dato, la quale evidentemente è la cotangente dell'arco incognito, cercare poscia l'arco corrispondente e prenderne il complemento. Bisogna però assicursi che non si presenti l'inconveniente che si è presentato nella ricerca diretta. Sia d il valore assoluto dell'errore da cui è affetta la tangente data; se con e si indica il valore assoluto dell'errore che, conseguentemente, affetta il valore inverso di $\tan x$, ossia $\tan(90° - x)$, si ha evidentemente

$$e < \frac{d}{(\tan x - d)^2};$$

per cui, se con f si indica il valore assoluto, espresso in secondi, dall'errore che si commette nella ricerca di $90° - x$ e quindi di x, sarà certamente

$$f < \frac{e \,.\, 60''}{\Delta y},$$

ossia

$$f < \frac{d \,.\, 60''}{(\tan x - d)^2 \,.\, \Delta y}. \tag{45}$$

---

(1) È per non aver fatta una osservazione come questa che l' Houel, nella ricerca dei logaritmi degli archi piccoli. (*Tables de logarihmes a cinq décimales*. Ed. Gauthier-Villars, Paris, 1877. Introd. *pagina XI*) ha creduto di proporre una metodo che renda trascurabile l'errore di interpolazione, mentre invece l'errore prodotto da quel metodo può superare anche 38 unità (V. il § 38 della nota citata *Sulla ricerca del logaritmo seno*... dovė demmo anche, a maggior conferma, un esempio *numerico)*.

Di qui risulta che, essendo x maggiore di 89°30' e supponendo che d derivi solo dall'arrotondamento dell'ultima cifra di $\tan x$, si ha certamente

$$f < 0'',000078 \tag{46}$$

e che quindi l'inconveniente accennato non si presenta affatto.

Concludendo: nella ricerca inversa di tangente l'interpolazione è permessa sempre, purchè alle considerazioni fatte alla fine del § 13 si aggiunga ora che da 80°44' a 89°30' L_i è generalmente minore di G_i e finisce col diventar trascurabile rispetto allo stesso G_i; e che per x maggiore di 89°30' conviene ricorrere all'artificio or ora accennato.

Osservazione I. — Supposto che l'errore che affetta $\tan x$ non sia dovuto solo all'arrotondamento e che quindi d possa essere maggiore di una mezza unità dell'ultimo ordine, la validità dell'artifizio accennato non cessa, perchè, anche supponendo d eguale a dieci unità dell'ultimo ordine, sarebbe sempre

$$f < 0'',0016 . \tag{47}$$

Osservazione II. — La ricerca dell'arco $90^0 - x$ dà luogo ai due errori γ_i e λ_i; ma l'errore in questione è sempre, come γ_i, tascurabile rispetto a λ_i (§ 13), anche nell'ipotesi della Oss. prec.

16. Sia

$$f(x) = \sec x .$$

Come già si disse nel § 14, G_d cresce al crescere di x_0 e tende all'∞ al tendere di x_0 a $90^0 - \Delta x$; procedendo quindi come nel § 13, dal secondo membro della (28), dopo pochi tentativi, si deduce che, se

$$\left.\begin{array}{lll} x < 80^0 43', & \text{si ha} & G_d < 0{,}498 \\ x > 80^0 43', & \text{»} \;\; \text{»} & G_d > 0{,}500 \end{array}\right\} . \tag{48}$$

Dunque nella ricerca diretta di secante l'interpolazione è permessa solo se x non supera 80°43' (§ 7).

Per la ricerca inversa si cominci col ricordare (§ 11) che G_i tende all'∞ al tendere di x_0 a zero, cala al crescere di x_0, raggiunge il suo minimo fra $\frac{1}{2}\alpha - \Delta x$ e $45^0 - \frac{1}{2}\Delta x$ (essendo α il minimo arco positivo che ha per coseno $\frac{1}{3}$), poi cresce e per x_0 tendente a $90^0 - \Delta x$ tende nuovamente all'∞; poscia si osservi che, siccome la differenza $\sec(x_0 - \Delta x) - \sec x_0$, per la (26), diventa piccolissima per x_0 tendente a zero e poi cresce sempre al crescere di x_0, altrettanto generalmente accade di Δy, e quindi L_i è grandissimo per x_0 tendente a zero, e poi generalmente cala al crescere di x_0 fino a $90^0 - \Delta x$. Ma, scorrendo la tavola, si vede che Δy è certamente minore di 2 per x minore di 2°09', per x minore di questo valore non occorre quindi la interpolazione; siccome inoltre anche qui supponiamo, per ora, che l'interpolazione si faccia solo quando è permessa nella ricerca diretta, basterà studiare come varino G_i ed L_i al variare di x_0 da 2°09' a 80°43'.

Ciò preposto, cominciamo dal cercare per quale valore di x_0 G_i sia minimo; dopo pochi tentativi si trova che il secondo membro della (36) cambia segno fra 35°15' e 35°16'; il minimo di G_i si ha dunque, nelle nostre ipotesi, per x_0 eguale a 35°15', e dal secondo membro della (29) si ha subito che questo

minimo è $0'',0061744\ldots$ [1] Poscia, scorrendo la tavola, osserviamo che al crescere di x da $2^{\circ}09'$ a $80^{\circ}43'$, Δy varia da 2 a 1101 (gli estremi inclusi); e, considerando separatamente l'intervallo in cui Δy ha una cifra sola o è al più eguale a 10 l'intervallo in cui Δy ha sempre due cifre o è al più eguale a 100, l'intervallo in cui Δy ha sempre tre cifre e l'intervallo in cui Δy ha sempre quattro cifre, si vede prima di tutto che è

$$\left.\begin{array}{rlc} \Delta y \leqslant 10 & \text{per} & 2^{\circ}09' < x < 17^{\circ}57' \\ 10 \leqslant \Delta y \leqslant 100 & \text{»} & 17^{\circ}57' < x < 59^{\circ}50' \\ 100 \leqslant \Delta y < 1000 & \text{»} & 59^{\circ}50' < x < 80^{\circ}15' \\ 1000 < \Delta y \leqslant 1101 & \text{»} & 80^{\circ}15' < x < 80^{\circ}43' \end{array}\right\}, \tag{49}$$

e che corrispondentemente, dal secondo membro della (29) e dalla (9), si ha

$$\left.\begin{array}{lcl} 0'',0583 > G_1 > 0'',0081 & \text{e} & 30'' \geqslant L_1 \geqslant 6'' \\ 0'',0061 < G_1 < 0'',0088 & \text{»} & 6'',0 \geqslant L_1 \geqslant 0'',6 \\ 0'',0087 < G_1 < 0'',0259 & \text{»} & 0'',60 \geqslant L_1 > 0'',06 \\ 0'',0258 < G_1 < 0'',0271 & \text{»} & 0'',060 > L_1 > 0'',055 \end{array}\right\}. \tag{49)'$$

Esaminando questo risultato, si vede che per x minore di $59^{\circ}50'$, G_1 si può considerare trascurabile rispetto ad L_1; da $59^{\circ}50'$ a $80^{\circ}43'$ non è più così, ma G_1 è sempre minore della metà di L_1 (§ 7).

Anche qui sarà utile ricordare che le quattro limitazioni ora indicate per L_1 corrispondono rispettivamente ai casi in cui Δy abbia generalmente una cifra, o generalmente due cifre, o sempre tre, o sempre quattro.

Osservazione I. — Per x minore di $2^{\circ}09'$ si faccia un'osservazione analoga alla Oss. I del § 12.

Osservazione II. — Dalla (28) e dalla (28)', dalla (29) e (29)'

$$\begin{array}{lcl} \text{per } x = 2^{\circ}09'30'' & \text{si ha} & 0'',057 < g_1 < 0'',059, \\ \text{per } x = 80^{\circ}42'30'' & \text{» »} & 0,49 < g_d < 0,50, \\ & \text{e} & 0'',026 < g_1 < 0'',028, \\ \text{per } x = 35^{\circ}15'30'' & \text{si ha} & 0'',0061 < g_1 < 0'',0062; \end{array}$$

quindi anche qui si può concludere come nella Oss. II al § 12.

17. In questo § e nel seguente ci proponiamo di fare uno studio analogo a quello fatto nei §§ 14 e 15.

Prima di tutto, nella stessa ipotesi fatta in principio del § 14, l'interpolazione nella ricerca diretta di secante può anche qui essere spinta fino a $82^{\circ}38'$, perchè, se

$$\left.\begin{array}{lcl} x < 82^{\circ}38'' & \text{si ha} & G_d < 0,992 \\ x > 82^{\circ}38'' & \text{» »} & G_d > 1,002 \end{array}\right\}. \tag{50}$$

Supponendo poscia che l'arco dato sia affetto da un errore avente per massimo ε'', si può anche qui (§ 14) osservare che l'interpolazione potrebbe essere spinta fin dove è verificata la (42). La quale, essendo ora

$$G_d = \frac{\overline{\Delta x}^2}{8} \frac{1 + \text{sen}^2 (x_0 + \Delta x)}{\cos^3 (x_0 + \Delta x)}, \qquad f'(x_0 + \theta\,\Delta x) = \frac{\text{sen}\,(x_0 + \theta\,\Delta x)}{\cos\,(x_0 + \theta\,\Delta x)},$$

[1] I calcoli numerici necessarî per questa ricerca ci riuscirono alquanto penosi per un deplorevole errore di stampa, che si trova nella tavola del Vlacq e che è *fedelmente* riprodotto in quella dell'Ozannam: nella pagina che va da 19°30′ a 20°00′, il seno di 19°30′ è 0,3338009, invece di essere 0,3338069, e questo errore ci condusse, ripetutamente (finchè, per caso, non ce ne accorgemmo) a risultati numerici che contraddicevano ai risultati teorici precedentemente ottenuti. E un altro errore, pure fedelmente riprodotto dall'Ozannam, avemmo occasione di rilevare nella pagina che va da 70°00′ a 70°30′: in essa il seno di 70°30′ è 9,9425415, invece di 0,9426415.

$$\frac{\overline{\Delta x}^2}{8} \cdot \frac{1 + \text{sen}^2 (x_0 + \Delta x)}{\cos^3 (x_0 + \Delta x)} < \frac{\Delta x}{1200} \cdot \frac{\text{sen}\, x_0}{\cos^2 x_0},$$

ossia

$$3 - \cos 2(x_0 + \Delta x) < \frac{1}{150\, \Delta x}\, \frac{1 + \cos 2(x_0 + \Delta x)}{1 + \cos 2x_0} [\text{sen}(2x_0 + \Delta x) - \text{sen}\, \Delta x]; \quad (51)$$

ed è facile vedere che questa è verificata fino ad $x_0 = 84°56'$. Nelle ipotesi fatte, si potrebbe dunque, nella ricerca diretta di secante, spingere la interpolazione fino a 84°57'.

E, finalmente, esaminando se per la ricerca diretta di secante sarebbe possibile seguire un artifizio analogo a quello indicato nel § 14 (calcolando cioè prima il coseno dell'arco dato e poscia l'inversa del valore così ottenuto) si vede che, se dei due errori γ_d e λ_d, da cui risulta affetto il coseno, si tenesse conto solo del primo, l'errore risultante nella secante così calcolate sarebbe minore di 0,26 fino a 89°45', ma che, se si tien conto anche del secondo, il limite superiore inabbassabile di quell'errore fino da 80° o da 85°, è già maggiore di 33, o di 131, unità.

Anche per la ricerca diretta della secante quindi, si deve concludere come si è concluso nel § 14.

18. Passiamo ora alla ricerca inversa di secante.

Dalla (29) si ricava, senz'altro, che per

$$80°43' < x < 89°30', \qquad 0'',0271 < G_i < 0'',5169, \qquad (52)$$

mentre che, corrispondentemente,

$$1106 \leqslant \Delta y \leqslant 369645, \qquad 0'',0543 > L_i > 0'',0001; \qquad (52)'$$

per cui, anche qui, si può ritenere lecita l'interpolazione fino a 89°30'.

Per x maggiore di 89°30' si può ricorrere a un artifizio identico a quello del § 15: calcolare cioè l'inversa del valore dato, la quale evidentemente è il coseno dell'arco incognito e cercare l'arco corrispondente. E, volendo assicurarsi che l'errore prodotto da questo artificio è trascurabile, basta ripetere il ragionamento del § 15; si arriva così a una formula che si può senz'altro ricavare dalla (45) sostituendo $\sec x$ a $\tan x$, e da essa, nelle stesse ipotesi, si deduce una limitazione identica alla (46).

Concludendo: anche nella ricerca inversa di secante l'interpolazione è sempre possibile, purchè alle considerazioni fatte alla fine del § 16, se ne aggiungano altre, analoghe a quelle fatte alla fine del § 15.

Osservazione. — Si ripetano qui osservazioni analoghe a quelle del § 15, perchè, nelle stesse ipotesi, si arriva a una limitazione identica alla (47).

19. Per completare il nostro studio, non ci resta più che da trovare le regole di cui parlammo al § 8, per eseguire i piccoli calcoli di interpolazione.

Prima di tutto, affinchè il calcolatore sappia se può, o no, nella ricerca diretta, fare l'interpolazione, supporremo che la tavola dia le differenze tavolari solo fin dove l'interpolazione stessa è lecita [1]. Per cui nel caso che qui

---

[1] Generalmente, nelle tavole logaritmo-trigonometriche, si mettono le differenze tavolari, spesso colle relative tavolette, anche dove l'interpolazione, nella ricerca diretta, non è lecita. Così per es.: il Bruhns nella sua tavola di 1'' in 1'', dà le tavolette accennate, meno che da 10' a 1°20' per mancanza di spazio (Pref. pag. VII): ebbene, usando, nella ricerca diretta, queste tavolette (come egli stesso fa in alcuni esempî proposti nella prefazione), si può, per x minore di 1', commettere un errore maggiore di 150.

Osservazione. — Nel caso in cui per la ricerca inversa di tangente e di secante oltre 89°30′ si ricorra all'artifizio indicato nei §§ 15 e 18, la regola ora accennata resta la stessa, perchè la ricerca si viene a fare sopra la tangente o sopra il seno di un arco minore di 30′; essendo allora Δy di due cifre sempre, si arriva alle unità di secondo, e il dubbio che questa approssimazione possa essere illusoria per effetto dell'errore f non sussiste, perchè il limite di questo errore, dato dalla (46) e anche dalla (47), è certamente trascurabile rispetto a L_1 (compreso ora fra 2″ e 6″, gli estremi inclusi).

G. Pesci.

Livorno, gennaio-marzo 1906. [1]

LA COSTRUZIONE DELL'ASSE CENTRALE DI UN SISTEMA DI FORZE [2]

Se un sistema di forze qualunque agisce sopra un corpo, si può in generale ridurre ad una forza unica e ad una coppia. Se l'asse della coppia ha la stessa direzione della retta d'azione della forza, questa retta si dice *asse centrale.* Noi supponiamo noto ai nostri lettori che in questo caso il momento della coppia è minimo.

---

(1) *Correggendo le bozze.* — Il Ch.^{mo} Prof. Fontoura da Costa della *Escola Naval* di Lisbona, al quale avevamo comunicata la prima parte di questo lavoro, ci ha, molto gentilmente, mandato un pregievolissimo e raro libriccino, che ci obbliga a modificare un po' quanto abbiamo asserito nella nota (2) al § 3.

Esso si intitola: "*Methodo de Reducção das distancias observadas no calculo das longitudes, por* Francisco de Paula Travassos". Coimbra, na Real Imprensa da Universidade, Anno de MDCCCV; ed ha tutte le dimensioni eguali a quelle del notissimo volumetto di tavole logaritmiche pubblicato, nello stesso anno, da Lalande.

Contiene, principalmente, una tavola di coseni naturali con sei cifre e di 10″ in 10″ (con le tavolette delle parti proporzionali); e questa va aggiunta a quelle che abbiamo citate nella nota (3) al § 2.

Inoltre, nella introduzione (di 44 pagine), l'A. insegna il modo di calcolare, coi valori naturali, l'angolo orario e le distanze lunari, e accenna (a pag. 41) ad altri calcoli ancora (come per es., quello dell'altezza) che si potrebbero eseguire in modo analogo. Egli quindi propose l'uso di questi valori nei principali calcoli nautici circa ottant'anni prima del Magnaghi; e la sua tavola dà un'approssimazione sufficiente anche nel calcolo delle distanze lunari, perchè essa è a sei cifre, anzichè a cinque, e il suo passo è di 10″, anzichè di 10′.

Notiamo finalmente che, per ambedue i calcoli accennati, l'A., molto opportunamente, trasforma la formula

$$\cos a = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$$

nell'altra

$$\cos a = \frac{\cos a - \cos (b + c)}{\frac{1}{2} \{\cos (b - c) - \cos (b + c)\}} - 1 .$$

(2) Appena pubblicato il n. III del corrente anno di questo periodico, contenente il mio articolo "Sulla composizione delle forze nello spazio" il chiaro prof. F. J. Vaes (che in unione al Dr. N. Quint dirige il pregievole giornale olandese *Wiskundig Tijdschrift*) ebbe la cortesia d'inviarmi le bozze di stampa del presente articolo, che stava per uscire nel suo giornale, e che tratta lo stesso argomento con metodo interamente diverso. Ho perciò creduto utile pubblicare in questo giornale la traduzione dell'articolo del prof. Krediet, mentre il mio è già stato riprodotto in Olandese nel *Wiskundig Tijdschrift.*

(Nota di G. Lazzeri.)

Generalmente si cerca questa risultante e questa coppia risultante, scomponendo le forze date in tre parallele ai tre assi di coordinate ortogonali, trasportando le componenti nell'origine coll'aggiunta di coppie, e per conseguenza il sistema si riduce a forze concorrenti nell'origine e a coppie nei piani delle coordinate.

Se P è la grandezza di una forza, α, β, γ sono i suoi coseni di direzione, a, b, c le coordinate del suo punto d'applicazione, ed R è la grandezza della risultante e λ, μ, ν i suoi coseni di direzione, e finalmente L, M, N sono i momenti delle coppie risultanti nei tre piani, si hanno le relazioni

$$\left.\begin{array}{l} R\lambda = \Sigma P\alpha \\ R\mu = \Sigma P\beta \\ R\nu = \Sigma P\gamma \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} L = \Sigma P\,(b\gamma - c\beta) \\ M = \Sigma P\,(c\alpha - a\gamma) \\ N = \Sigma P\,(a\beta - b\alpha) \end{array}\right\}. \tag{1}$$

È superfluo dimostrare queste relazioni, che si trovano in tutti i libri di meccanica. Noi le abbiamo menzionate per servircene.

Proiettiamo le forze P sui tre piani coordinati, che consideriamo come i tre piani di proiezione della geometria descrittiva.

Consideriamo per fissare le idee il piano XOY. Le proiezioni delle forze P formano su questo piano, un sistema piano di forze. I punti d'applicazione di queste sono dati dalle coordinate a, b, le componenti parallele agli assi x, y da $P\alpha$, $P\beta$. Questo sistema si può ridurre coi mezzi ordinari della meccanica o della statica grafica. La risultante, per rimanere nel caso più generale, avrà per retta d'azione quella rappresentata dall'equazione

$$y\Sigma P\alpha - x\Sigma P\beta = \Sigma\,(b\alpha - a\beta).$$

Così, tenendo conto delle (1), si ha

$$x\mu - y\lambda = \frac{N}{R}. \tag{2}$$

Analogamente negli altri due piani troviamo le rette

$$\left.\begin{array}{l} y\nu - z\mu = \dfrac{L}{R} \\ z\lambda - x\nu = \dfrac{M}{R} \end{array}\right\}. \tag{3}$$

Supponiamo di aver costruito con un disegno di geometria descrittiva queste tre rette. Si possono considerare le rette (3) come *proiezioni* di una retta nello spazio, e si può costruire la proiezione

di questa sul terzo piano di proiezione. Analiticamente ciò equivale ad eliminare z fra le due equazioni (3). Questa eliminazione dà

$$x\mu - y\lambda = -\frac{L\lambda + M\mu}{R\nu}. \tag{4}$$

Questa retta è parallela a quella data dall'equazione (2). La distanza fra di esse è

$$p = -\frac{N}{R\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} - \frac{L\lambda + M\mu}{R\nu\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}},$$

ossia

$$p = -\frac{L\lambda + M\mu + N\nu}{R\nu\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}. \tag{5}$$

Se trasportiamo l'origine in un punto x, y, z, le equazioni (1) non cambiano, eccettuate le tre ultime. Esse diventano

$$\begin{aligned} L_1 &= \Sigma P \{(b - y_1)\gamma - (c - z_1)\beta\} \\ M_1 &= \Sigma P \{(c - z_1)\alpha - (a - x_1)\gamma\} \\ N_1 &= \Sigma P \{(a - x_1)\beta - (b - y_1)\alpha\}, \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned} L_1 &= L - R(y_1\nu - z_1\mu) \\ M_1 &= M - R(z_1\lambda - x_1\nu) \\ N_1 &= N - R(x_1\mu - y_1\lambda). \end{aligned}$$

Se x_1, y_1, z_1 è un punto dell'asse centrale, i valori di L_1, M_1, N_1 sono proporzionali a $R\lambda$, $R\mu$, $R\nu$; e quindi l'equazioni dell'asse centrale sono

$$\frac{L - R(y_1\nu - z_1\mu)}{\lambda} = \frac{M - R(z_1\lambda - x_1\nu)}{\mu} = \frac{N - R(x_1\mu - y_1\lambda)}{\nu}.$$

Ciascuna di queste frazioni è eguale a

$$\frac{L\lambda + M\mu + N\nu}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2} \quad \text{ossia a} \quad L\lambda + M\mu + N\nu.$$

Così la proiezione dell'asse centrale sul piano XOY ha per equazione

$$\frac{N - R(x_1\mu - y_1\lambda)}{\nu} = L\lambda + M\mu + N\nu,$$

ovvero

$$x_1\mu - y_1\lambda = \frac{N}{R} - \frac{\nu(L\lambda + M\mu + N\nu)}{R}. \tag{6}$$

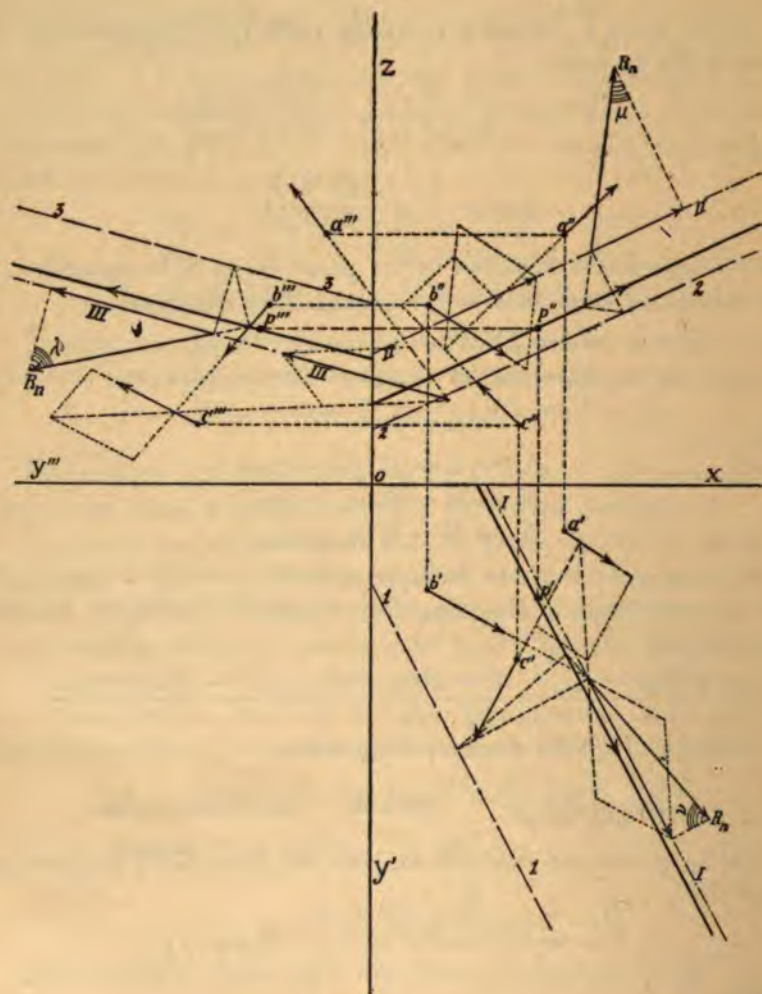
Essa è pure parallela alla retta (2); e la distanza fra le rette (2) e (6) è data da

$$q = -\frac{\nu(L\lambda + M\mu + N\nu)}{R\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}, \tag{7}$$

dunque

$$q = p\nu^2. \tag{8}$$

È chiaro che la risultante delle forze nel piano XOY ha la grandezza

$$\sqrt{(\Sigma P\alpha)^2 + (\Sigma P\beta)^2} \qquad \text{ossia} \qquad R\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}.$$

Facciamo rotare la risultante R, attorno alla sua proiezione sul piano XOY, per ribaltarla su questo piano; allora avremo costruito l'angolo che ha ν per coseno. Allora la costruzione di q, p, che è nota, è facile e non richiede spiegazioni.

Pertanto la proiezione dell'asse centrale sul piano XOY è trovata. Analogamente si trovano le altre proiezioni. Come riprova si costruiranno tutte e tre le proiezioni.

Come abbiamo dimostrato il momento della coppia nel piano XOY è

$$N_1 = N - R(x_1\mu - y_1\lambda);$$

dunque, tenendo conto della (5), avremo

$$N_1 = \nu(L\lambda + M\mu + N\nu),$$

oppure (7)

$$N_1 = -qR\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}.$$

Così N_1 è il momento della forza $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$ agente secondo la retta (5) rispetto ad un punto dell'asse centrale. La nostra costruzione dà dunque l'asse centrale, le risultanti

$$R\sqrt{\mu^2 + \nu^2}, \qquad R\sqrt{\nu^2 + \lambda^2}, \qquad R\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$$

e la grandezza delle coppie L, M, N, cioè le proiezioni della risultante e della coppia risultante.

Nella figura abbiamo eseguito la costruzione per tre forze date.

KREDIET
Rotterdam.

ALCUNE PROPRIETÀ METRICHE DELLA CUBICA DEL WALLIS

1. Se l'equazione

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

ha tre radici reali distinte α, β, γ legate fra loro dalla relazione

$$2\beta = \alpha + \gamma,$$

deve essere

$$\beta = -\frac{B}{3A} \quad e \quad B^2 > 3AC.$$

Discende da ciò che, data una parabola cubica del Wallis

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d, \qquad (1$$

le rette, e queste solamente, passanti per il punto di essa di as $-\frac{b}{3a}$, cioè pel punto d'inflessione della parabola, incon parabola stessa in due ulteriori punti reali equidistant di flesso, se il loro coefficiente angolare μ soddisfa al

$$b^2 + 3a\mu > 3ac.$$

Se N è il punto di flesso ed M, M' sono i punti d'intersezione di una retta per N colla cubica, le corde MN, NM' e gli archi che hanno gli estremi negli stessi punti, limitano porzioni di piano di area uguale.

Reciprocamente, se la corda MM' interseca la parabola cubica in un punto N, compreso fra M ed M', in modo che le aree racchiuse dagli archi MN, NM' e dalle corde MN, NM' siano uguali, devono essere M e M' equidistanti da N e quindi N essere il flesso.

Si osservi, infatti, che, in questo caso, l'area Λ della porzione di piano limitata dall'arco MM', dalle ordinate in M ed M' e dall'asse x deve coincidere con l'area Λ' del trapezio limitato dalla corda MM', dalle ordinate ai punti M, M' e dall'asse x.

Siano (x_1, y_1) (x'_1, y'_1) le coordinate dei punti M, M'; si ponga

$$x_0 = \frac{x_1 + x'_1}{2} \qquad y_0 = \frac{y_1 + y'_1}{2}$$

e con $\bar{y}$ si indichi l'ordinata in x_0 alla parabola cubica. Per la nota formula di Simpson, [1] l'area Λ è data da

$$\Lambda = \frac{x'_1 - x_1}{6} (y_1 + 4\bar{y} + y'_1)$$

e quella del trapezio da

$$\Lambda' = \frac{x'_1 - x_1}{2} (y_1 + y'_1) = \frac{x'_1 - x_1}{6} (y_1 + 4y_0 + y'_1)$$

da cui si trae, per l'eguaglianza $\Lambda = \Lambda'$.

$$\bar{y} = y_0 .$$

Deve dunque N avere le coordinate x_0, y_0, ciò che dimostra l'asserto.

2. Tre punti della cubica M, N, M' fra le cui ascisse α, β, γ passa la relazione

$$2\beta = \alpha + \gamma, \tag{2}$$

non sono allineati se N non è il punto d'inflessione. In questa ipotesi pei tre punti passa sempre una parabola conica, ed in generale una sola

$$y = mx^2 + nx + p. \tag{3}$$

---

(1) Sarà bene ricordare che se $f(x)$ è una funzione razionale intera di grado non superiore al 3°, si ha identicamente

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

Il secondo membro si assume come valore approssimato per l'integrale

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

se $f(x)$ non soddisfa alle dette condizioni. Cfr. Peano, *Applicazioni geometriche di Calcolo infinitesimale.* Torino, 1887. Cap. V, § 6, n. 32.

La porzione di piano limitata dai due archi MN delle due parabole ha area uguale a quella limitata dai due archi NM'; e ciò è una conseguenza immediata della già ricordata formula di Simpson. La quale ci autorizza ad enunciare la proprietà reciproca, e cioè: se una parabola cubica (1) ed una parabola conica (3) si intersecano in tre punti M, N, M' in modo che siano uguali le aree delle porzioni di piano limitate dagli archi MN delle due curve e dagli archi NM', fra le ascisse α, β, γ dei tre punti passa la relazione (2).

Infatti, essendo (x_1, y_1) (x'_1, y'_1) le coordinate di M, M', se si pone

$$2x_0 = x_1 + x'_1$$

e si indicano con y_0, y'_0 le ordinate in x_0 alla parabola cubica e conica rispettivamente, dev'essere

$$\frac{x'_1 - x_1}{6} (y_1 + 4y_0 + y'_1) = \frac{x'_1 - x_1}{6} (y_1 + 4y'_0 + y'_1),$$

ciò che porta

$$y_0 = y'_0.$$

È dunque x_0 l'ascissa di N, come si voleva provare.

Una parabola cubica (1) ed una parabola conica (3) hanno le proprietà accennate se fra i coefficienti delle loro equazioni passano le relazioni

$$27a^2 (d - p) - 9a (b - m) (c - n) + 2 (b - m)^3 = 0$$
$$(b - m)^2 > 3a (c - n).$$

Data una parabola cubica (1), qualunque parabola conica (3) che incontri la precedente in tre punti M, N, M' di ascisse α, β, γ per le quali sia

$$\beta - \alpha = \gamma - \beta = h \tag{4}$$

limita con essa, mediante i due archi che hanno gli estremi comuni in M, N (od in N, M'), una porzione di piano di area costante

$$\frac{ah^4}{4}.$$

Fissata una parabola cubica (1), l'inviluppo di tutte le parabole coniche (3) soddisfacenti alle predette condizioni è costituito dalle due cubiche parallele alla fissa alla distanza $\pm \frac{2ah^3}{3\sqrt{3}}$ secondo la direzione dell'asse della parabola conica. E $\pm \frac{2ah^3}{3\sqrt{3}}$ sono le lunghezze dei due segmenti massimi che le due parabole intercettano sulle rette parallele all'asse y, fra i punti M, M'; essi tagliano le corde MN, NM' in due punti distanti da N di $\frac{l}{\sqrt{3}}$, $\frac{l'}{\sqrt{3}}$ se l, l' sono le lunghezze di quelle due corde.

Infatti, posto

$$\mathrm{I}_r = \frac{\partial (f_1 \dots f_{r-1} f_{r+1} \dots f_{n+1})}{\partial (x_1 \dots x_n)}, \qquad \varphi_r = \frac{\partial (\mathrm{I}_1 \dots \mathrm{I}_{r-1} \mathrm{I}_{r+1} \dots \mathrm{I}_{n+1})}{\partial (x_1 \dots x_n)}$$

$(r = 1, 2, \dots n + 1)$ si ha

$$\mathrm{K}(f_1 \dots f_{n+1}) = f_1 \mathrm{I}_1 + \dots + f_{n+1} \mathrm{I}_{n+1}$$

ma pel teorema di Clebsch [1] $f_i = \mathrm{M}\varphi_i$ essendo M un fattore costante dunque

$$\mathrm{K}(f_1 \dots f_{n+1}) = \mathrm{M}(\mathrm{I}_1 \varphi_1 + \dots \mathrm{I}_{n+1} \varphi_{n+1}) = \mathrm{MK}(\mathrm{I}_1 \dots \mathrm{I}_{n+1}). \quad \text{c. v. d.}$$

Noto ora, di passaggio, un teorema anch'esso immediata conseguenza del teorema di Clebsch:

Il determinante di funzioni

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & & f_{n+1} \\ \frac{\partial \mathrm{I}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathrm{I}_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \mathrm{I}_{n+1}}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \mathrm{I}_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \mathrm{I}_2}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial \mathrm{I}_{n+1}}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

equivale, a meno di un fattore, alla somma dei quadrati degli jacobiani φ. Questo fattore è lo stesso di quello per cui le f *differiscono dalle φ.*

Inatti, sviluppando per la prima linea, si ha

$$\mathrm{D} = \Sigma f_i \varphi_i = \mathrm{M}\Sigma \varphi_i^2. \qquad \text{c. v. d.}$$

a) Consideriamo $n + 1$ funzioni $f_1 \dots f_{n+1}$ delle variabili $x_1 \dots x_{n-1}$, e, trascurando volta per volta una funzione f, costruiamo gli $n + 1$ determinanti K che indicheremo rispettivamente con $k_1 \dots k_{n+1}$; trascurando poi volta per volta due determinanti k, costruiamo delle $n - 1$ funzioni rimanenti gli $\binom{n+1}{2}$ jacobiani I_{ij}; è facile trovare, seguendo la dimostrazione di Clebsch, delle semplici relazioni fra i determinanti I_{ij} e le funzioni f_i.

Essendo a_i, b_i, c_i delle arbitrarie, consideriamo il determinante

$$\mathrm{R} = \begin{vmatrix} \frac{\partial k_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial k_1}{\partial x_{n-1}} & a_1 & b_1 & c_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial k_{n+1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial k_{n+1}}{\partial x_{n-1}} & a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \\ 0 & \dots & 0 & \Sigma a_i f_i & \Sigma b_i f_i & \Sigma c_i f_i \end{vmatrix}.$$

Se si sviluppa per i minori compresi fra le ultime tre colonne a destra, si trova

$$\mathrm{R} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i f_i \sum_{ij}^{n+1} b_i c_j \mathrm{I}_{ij} - \sum_{i=1}^{n+1} b_i f_i \sum_{ij}^{n+1} a_i c_j \mathrm{I}_{ij} + \sum_{i=1}^{n+1} c_i f_i \sum_{ij}^{n+1} b_i a_j \mathrm{I}_{ij} =$$
$$= \sum_{ijl} a_i b_j c_l (f_l \mathrm{I}_{ji} - f_j \mathrm{I}_{li} + f_i \mathrm{I}_{lj}).$$

[1] V. *loc. cit.*

in cui a_i, b_i indicano delle arbitrarie. Se si sviluppa per i m[inori] compresi fra le due ultime colonne a destra, si trova

$$R = \Sigma b_i x_i \Sigma a_i k_i - \Sigma a_i x_i \Sigma b_i k_i$$

$$R = \Sigma a_r b_s (k_r x_s - k_s x_r).$$

deve k_i dinotano gli $n+2$ determinati K; di seguito

Facciamo l'ipotesi che le f_i siano tutte omogenee dello stesso grado m; allora, sottraendo dall'ultima linea di R le precedenti moltiplicate rispettivamente per $-m, x_1, \dots x_{n+2}$, gli elementi dell'ultima linea diventano zero; dunque $R=0$ qualunque siano le arbitrarie a_i, b_i.

Ne segue, per qualunque combinazione rs degli indici

$$k_r x_s - k_s x_r = 0 \qquad \text{cioè} \qquad \frac{k_r}{k_s} = \frac{x_r}{x_s};$$

a meno di un fattore comune le k coincidono dunque con le x. La ricerca di questo fattore la di cui rappresentazione effettiva nel caso contemplato dal Clebsch *sembra legata a rilevanti difficoltà* (¹) qui si può fare con tutta facilità addirittura pel caso generale, perchè da

$$(m-1)(n+1)k_i = \begin{vmatrix} (m-1)(n+1)I_1 & \frac{\partial I_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial I_1}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial I_1}{\partial x_{i+1}} & \dots & \frac{\partial I_1}{\partial x_{n+2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (m-1)(n+1)I_{n+2} & \frac{\partial I_{n+2}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial I_{n+2}}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial I_{n+2}}{\partial x_{i+1}} & \dots & \frac{\partial I_{n+2}}{\partial x_{n+2}} \end{vmatrix}$$

segue

$$(m-1)(n+1)k_i = (-1)^{i-1} \frac{\partial(I_1 \dots I_{n+2})}{\partial(x_1 \dots x_{n+2})};$$

a meno di un fattore numerico il fattore di proporzionalità richiesto è dunque, in valore assoluto, il jacobiano delle I rispetto alle x.

Dal teorema dimostrato segue immediatamente che: *Il determinante formato orlando il jacobiano*

$$\frac{\partial(I_1 \dots I_{n+2})}{\partial(x_1 \dots x_{n+2})}$$

con una linea di variabili ed una colonna di funzioni in modo che sia zero l'elemento d'incrociamento equivale, a meno di un fattore numerico, al prodotto del jacobiano stesso per la somma dei quadrati delle variabili.

(¹) ... Aber seine wirkliche Darstellung scheint mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden, die ich nur für drei Functionen mit zwei Variabeln und für vier Functionen mit drei Variabeln durch besondere Betrachtungen habe überwinden können... CLEBSCH, loc. cit.

Veggasi anche: ROSANES. Ueber Functionen welche ein den Functionaldeterminanten analoges Verhalten zeigen. Crelle. Vol. LXXV, pag. 166.

Invero basta sottrarre dalla prima linea moltiplicata per n del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \dots & (-1)^{n-1} 1 \\ 1 & \frac{\partial k_1}{\partial x_1} & \frac{\partial k_2}{\partial x_2} \dots & \frac{\partial k_n}{\partial x_n} \\ -1 & \frac{\partial k_2}{\partial x_2} & \frac{\partial k_3}{\partial x_3} \dots & \frac{\partial k_1}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{n-1} 1 & \frac{\partial k_n}{\partial x_n} & \frac{\partial k_1}{\partial x_1} \dots & \frac{\partial k_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \end{vmatrix}$$

la 2^a, 3^a, ..., $(n+1)^{ma}$ rispettivamente moltiplicate per $(-1)^0$, $(-1)^1$, ... $(-1)^{n-1}$ perchè tutti gli elementi della prima linea si annullino.

ROBERTO OCCHIPINTI.

RAPPRESENTAZIONE DELLE OMOGRAFIE NELLO SPAZIO A TRE DIMENSIONI

Il sig. Ascoli nel fasc. V, anno 1905 di questo Periodico si è occupato della rappresentazione mediante i punti dello spazio delle ∞^3 omografie binarie che si possono segnare sopra una forma di prima specie. Ora io mi propongo di ritornare su questo argomento per mostrare una costruzione geometrica del punto immagine dell'omografia considerata, e ancora per studiare l'omografia dello spazio che si può dedurre dalla corrispondenza posta fra le omografie binarie e le loro trasformate, e farne poi un'applicazione alla rappresentazione delle rotazioni sferiche, e in particolare di quelle che trosformano un dodecaedro regolare in se stesso. Tale applicazione venne già fatta dallo Stefanos il quale studiò le rotazioni che sovrapongono un cubo a se stesso.

1. Consideriamo le omografie segnate su di una conica C^2. Esse formano un sistema Σ_3 lineare ∞^3 come i punti e i piani dello spazio ordinario S_3. Sia:

$$\Omega(xx') = a_{11}x_1x'_1 + a_{12}x_1x'_2 + a_{21}x_2x'_1 + a_{22}x_2x'_2 = 0$$

l'equazione dell'omografia; i suoi coefficienti saranno le coordinate omogenee dell'omografia, essendo

$$x_1x'_1 = 0 \qquad x_1x'_2 = 0 \qquad x_2x'_1 = 0 \qquad x_2x'_2 = 0$$

le equazioni delle omografie fondamentali di coordinate

$$(1,\ 0,\ 0,\ 0);\quad (0,\ 1,\ 0,\ 0);\quad (0,\ 0,\ 1,\ 0);\quad (0,\ 0,\ 0,\ 1)$$

e

$$x_1x'_1 + x_1x'_2 + x_2x'_1 + x_2x'_2 = (x_1 + x_2)(x'_1 + x'_2) = 0$$

quella di coordinate (1, 1, 1, 1) ossia l'omografia unità.

Immaginiamo di condurre per la conica C^2 situata nel piano ω una quadrica S^2 che supponiamo a rette reali; le generatrici (g) di essa saranno poste in corrispondenza proiettiva colle direttrici (d) qualora le due punteggiate A, B, C...; A′, B′, C′,... proiettive su C^2 siano rispettivamente prospettive ai sistemi (g) e (d).

Tre coppie di generatrici e direttrici corrispondenti si incontrano in tre punti che individuano un piano π segante S^2 lungo una conica C^2_π, sulla quale i due sistemi di rette della quadrica determineranno due punteggiate proiettive di cui i tre punti considerati sono uniti; ne segue che tutti i punti sono uniti, cioè per ogni punto di C^2_π passa una generatrice g e una direttrice d proiettanti da quel punto una coppia di punti corrispondenti in $\Omega(xx') = 0$.

Si ha quindi che ad ogni omografia data su C^2 corrisponde un piano dello spazio, e viceversa dato un piano dello spazio esso sega S^2 lungo una conica dai cui punti partono una generatrice e una direttrice proiettanti su C^2 due punteggiate proiettive in una determinata omografia. Se ora noi a questo piano π facciamo corrispondere il suo polo P nella polarità definita dalla quadrica S^2, resta stabilita una corrispondenza biunivoca e senza eccezione fra i punti dello spazio e le omografie poste su C^2. Il punto P sarà detto l'*immagine* dell'omografia considerata. La conica C^2_π taglierà la C^2 secondo due punti che saranno i punti uniti dell'omografia e quindi la retta comune ai piani delle due coniche sarà l'*asse* dell'omografia.

2. Da quanto si è detto segue questa costruzione per il punto immagine di un'omografia:

L'immagine di un'omografia di C^2 è il vertice di un cono circoscritto a S^2, del quale ciascun piano tangente taglia S^2 secondo due rette g, d, *appoggiate a due punti* x, x′ *corrispondenti nell'omografia.*

Se l'omografia data è involutoria si vede subito che la sua immagine è il centro dell'involuzione. Dunque:

Le involuzioni hanno per immagini i punti del piano ω di C^2.

Se l'omografia è degenere, ad essa corrisponderà un punto della quadrica S^2 e precisamente il punto ove si tagliano la generatrice g_1 e la direttrice d_2 passanti pei due punti singolari (g_1d_1), (g_2d_2) dell'omografia degenere. Le involuzioni paraboliche hanno per immagini i punti di C^2, l'identità ha per immagine il polo O di ω.

Data un'omografia rappresentata da un punto qualunque A dello spazio i suoi punti uniti sono i due punti di ω in cui il piano α po-

grafie aventi i medesimi punti uniti è la polare OA della retta congiungente i punti stessi. Il cono quadrico O^2 di vertice O e circoscritto alla quadrica S^2 lungo C^2 sarà il luogo delle immagini delle omografie paraboliche che saranno definite dalla relazione

$$I^2 - 4\Delta = 0$$

dove si è posto

$$I = a_{12} - a_{21} \qquad \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} .$$

Dati sulla conica C^2 due punti $x = (gd)$, $x' = (g'd')$, essi saranno gli elementi singolari di una certa omografia degenere rappresentata dal punto P in cui il piano (gd') tocca S^2; tutti i punti di questo piano rappresentano omografie in cui sono corrispondenti i punti x, x' e analogamente tutti i punti del piano $(g'd)$ tangente alla quadrica S^2 nel punto P′ rappresenteranno omografie in cui sono corrispondenti i punti x', x; avremo dunque che:

Il luogo dei punti che rappresentano omografie in cui sono corrispondenti due punti dati x, x′ *è il piano tangente alla quadrica* S^2 *nel punto che rappresenta l'omografia degenere avente* x, x′ *per elementi singolari.*

I due piani (gd'), $(g'd)$ si tagliano nella retta xx' che rappresenta omografie involutorie in cui i punti x, x' si corrispondono in doppio modo.

Come casi particolari dei precedeuti possiamo dire che:

Il luogo dei punti rappresentanti omografie aventi un dato punto unito x *è il piano tangente alla quadrica* S^2 *nel punto* x; *e il luogo delle involuzioni che hanno un dato punto doppio* x *è la tangente a* C^2 *in* x.

3. Consideriamo due omografie A, A′ l'una inversa dell'altra, tali che nella prima ad un punto $x = (gd)$ corrisponda un punto $x' = (g'd')$ e nella seconda a x' corrisponda x.

Siccome i due piani (gd') e $(g'd)$ sono separati armonicamente dal punto O e dal piano ω, anche i punti A e A′ saranno separati armonicamente da O e ω, quindi:

Due omografie l'una inversa dell'altra sono rappresentate da due punti corrispondenti nell'omologia armonica che ha per centro O *e per piano* ω, *e reciprocamente.*

4. Vediamo ora di stabilire la condizione perchè due punti dello spazio rappresentino omografie armoniche. Sappiamo che condizione necessaria e sufficiente affinchè due omografie siano armoniche è che ad una coppia di elementi corrispondano nelle due omografie gli stessi elementi, ma permutati. Ora prendiamo a considerare le omografie rappresentate da due punti A e B che siano poli armonici rispetto alla quadrica S^2. Il piano α polare di A passa per B che sarà centro

siano fra loro corrispondenti un piano e un'omografia che abbiano le stesse coordinate. In tal caso indicando con a_{rs} le coordinate di un omografia e del punto corrispondente, con r la caratteristica dell'omografia; il luogo dei punti che rappresentano omografie aventi una data caratteristica è una superficie di 2° ordine di equazione

$$rI^2-(1+r)^2\Delta=0\,.$$

Ponendo $r=-1$ e $r=0$ si ha

$$I=0 \qquad \Delta=0$$

che sono le equazioni del piano ω luogo delle omografie involutorie e della quadrica S^2 luogo delle omografie degeneri.

Ponendo $r=1$ e $r=i$ si ha

$$I^2-4\Delta=0 \qquad I^2-2\Delta=0$$

che rappresentano rispettivamente il cono O^2 luogo delle omografie paraboliche e la quadrica S_1^2 luogo delle omografie cicliche di 4° ordine.

7. Consideriamo ora un'omografia generale rappresentata dal punto P dello spazio, essa è trasformata da un'omografia A in un'altra P' e le coordinate della nuova omografia sono forme lineari delle coordinate di P. Quindi un'omografia A determina un'omografia Ω_a dello spazio S_3 in cui sono corrispondenti un punto P immagine di un'omografia P di C^2 e il punto P' immagine della sua trasformata. Un'omografia degenere è trasformata da Ω_a in un'omografia pure degenere, quindi in Ω_a ad un punto P di S^2 corrisponde un punto P' della quadrica stessa in modo che alla generatrice g e alla direttrice d passanti per P corrispondono rispettivamente la generatrice g' e la direttrice d' passanti per P', cioè:

L'omografia Ω_a trasforma in se stessa la quadrica S^2 e ciascun sistema di rette della quadrica medesima.

Due omografie fra loro armoniche di C^2 sono trasformate da Ω_a in due omografie armoniche, quindi a due poli P e Q coniugati rispetto a S^2 corrispondono in Ω_a pure due poli coniugati. Un'involuzione è pure trasformata da Ω_a in un'involuzione, dunque ad un punto P del piano ω di C^2 corrisponde un punto P' del piano stesso, cioè ω è un piano unito di Ω_a. Pure cangiati in sè stessi saranno i punti O, A, A^{-1} immagini dell'identità, dell'omografia A e della sua inversa; sarà quindi AO una retta di punti uniti in Ω_a. Essa sarà poi una retta unita per tutte le omografie dello spazio che si ottengono trasformando il sistema Σ_3 delle omografie binarie con quelle del fascio rappresentato dalla retta OA. E poichè ad un punto P e al suo piano polare rispetto a S^2 corrisponde in Ω_a un punto P' e il suo piano polare π', ne segue che i piani polari dei punti di $s=OA$ sono piani uniti di Ω_a passanti per una retta s' di ω polare reciproca di s. Que-

di Ω_a che sono i punti uniti dell'omografia A cioè i punti dove s' sega C^2. Dunque:

L'omografia Ω_a dello spazio possiede una retta s di tutti punti uniti e una retta s' di tutti piani uniti.

Dato l'asse s' di A e una coppia a, a' di punti corrispondenti, resta determinata l'omografia A, e quindi anche Ω_a che cangia adunque in sè stessa la quadrica S^2, la conica C^2 e tutte le coniche di S^2 sezioni con piani passanti per s'.

Se e, f sono i punti uniti di A cioè i punti ove s' sega C^2; a, a'; a', a'' due coppie di punti corrispondenti in A, e r la sua caratteristica, si avrà

$$r^2 = (efaa')\ (efa'a'') = (efaa'') = a'(efaa'') = (efpp')$$

dove p, p' sono due punti corrispondenti in Ω_a sulla retta s', cioè:

La caratteristica delle punteggiate proiettive corrispondenti sulla retta s', *o quella dei fasci di piani passanti per* OA, *è il quadrato della caratteristica dell'omografia* A.

Il sistema ∞^3 delle omografie di C^2 dà adunque luogo ad un sistema ∞^3 di omografie dello spazio, le quali hanno tutte in comune il punto unito O immagine dell'identità, e il piano unito ω immagine delle involuzioni.

8. Consideriamo le omografie di un fascio F e del suo armonico F'; esse saranno rappresentate da due rette f, f' polari reciproche rispetto a S^2. L'omografie del fascio F come quelle del fascio F' daranno luogo a due serie ∞^1 di omografie dello spazio le cui rette di punti uniti saranno le rette che proiettano da O i punti di f e f'. Se sono P, P' e Q, Q' i punti ove f, f' segano rispettivamente S^2, essi sono i vertici di un tetraedro PP'QQ' di cui due spigoli opposti sono f e f', e gli altri spigoli sono le coppie di generatrici e direttrici di S^2 uscenti dai vertici del tetraedro stesso. Siano g, d la generatrice e la direttrice uscenti da P, e g', d', quelle uscenti da P', saranno g, g'; d, d' le altre due coppie di spigoli opposti del tetraedro e quindi g, d' e $g'\ d$ le rette uscenti rispettivamente da Q e Q'. Allora le coppie di rette g, d' e g', d tagliano C^2 in coppie A, A'; B, B' di punti corrispondenti in tutte le omografie del fascio F e le coppie g, d; g', d' tagliano C^2 in coppie A, B'; B, A' di punti corrispondenti in tutte le omografie di F', quindi:

I piani OAB, OA'B' *sono corrispondenti in tutte le omografie dello spazio le cui corrispondenti omografie binarie hanno per immagini i punti della retta* f *e quelli della sua polare reciproca* f'.

Reciprocamente, prese su C^2 due coppie di punti A, A'; B, B' ed A, B'; B, A', esse determinano due fasci F, F' di omografie a cui appartengono come coppie comuni di punti corrispondenti; i due

fasci F, F′ sono armonici e le loro immagini sono due rette f, f' polari reciproche rispetto ad S^2, e dànno luogo a due serie ∞^1 di omografie dello spazio che hanno una coppia di piani corrispondenti in comune. Per O passa una retta r coniugata in Π al piano OAB e una retta r' coniugata al piano OA′B′; le due rette r, r' sono corrispondenti in tutte le omografie dello spazio che corrispondono ai fasci F, F′ di omografie di C^2.

9. *Rappresentazione coi punti dello spazio ordinario delle rotazioni sferiche.* — La rappresentazione coi punti dello spazio delle omografie binarie di C^2 può essere applicata alla rappresentazione delle rotazioni attorno ad un punto fisso. Osserviamo infatti che, se assumiamo come quadrica S^2 una sfera avente per centro l'immagine O dell'omografia identica, e come piano delle omografie involutorie il piano all'infinito, allora l'omografia dello spazio che ora abbiamo studiato diventa una rotazione attorno al punto O. Ne segue che ad ogni rotazione attorno al punto O corrisponde un'omografia segnata sul cerchio all'infinito della sfera, e reciprocamente ad ogni omografia su questo cerchio corrisponde una rotazione attorno al punto O. Si vede quindi che la rappresentazione coi punti dello spazio delle omografie segnate sul cerchio all'infinito della sfera può servirci alla rappresentazione delle rotazioni sferiche.

10. Essendo i il raggio della sfera di centro O la sostituzione lineare che lega in questo caso particolare le coordinate a_{rs} dell'omografie con quelle del punto immagine sarà:

$$a_{11} = -ix_1 - x_2 \qquad a_{12} = -ix_3 + x_4$$
$$a_{21} = -ix_3 - x_4 \qquad a_{22} = ix_1 - x_2$$

da cui si ha:

$$\Delta = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^1$$
$$I = 2x_4 .$$

Uguagliate a zero, queste due espressioni ci rappresentano precisamente la sfera di centro O (di coordinate 0, 0, 0, 1) e raggio i e il piano all'infinito.

Vediamo ora come si possa individuare il punto immagine di una certa rotazione. Questo punto sarà posto sull'asse di rotazione; per stabilire la sua distanza dal centro O osserviamo che se θ è l'argomento dell'angolo di rotazione, esso sarà legato alla caratteristica dell'omografia corrispondente sul cerchio all'infinito dalla relazione

$$\theta = i \log r \tag{1}$$

che sussisterà a meno di un multiplo di π. Ora detta R questa distanza avremo:

$$R = \frac{1}{x_4}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{i}{I}\sqrt{I^2 - 4\Delta},$$

Il luogo dei punti che rappresentano rotazioni che sovrapongono due raggi uscenti da O è una retta.

12. *Rotazioni che sovrapongono un poliedro regolare a se stesso.* — Quanto è stato detto nei capitoli precedenti ci può servire allo studio delle rotazioni che sovrapongono un poliedro regolare a se stesso. Noteremo prima di tutto che le rotazioni che trasformano in se stesso un poliedro regolare trasformano pure in se stesso la figura che si ottiene conducendo pei vertici i piani tangenti alla sfera circoscritta, figura che è un poliedro regolare che si dice *polare* del primo. Le rotazioni adunque che trasformano in se stesso il cubo e il dodecaedro regolare saranno le stesse di quelle delle loro figure polari, l'ottaedro e l'icosaedro regolare. Lo studio della configurazione dei punti immagini delle rotazioni che fanno rientrare in se stessi il cubo e il tetraedro regolare venne già fatto dallo Stefanos, noi verremo esaminando invece la configurazione formata dai punti corrispondenti alle rotazioni trasformanti il dodecaedro in se stesso.

13. Calcoliamo il numero N di queste rotazioni. Se supponiamo di considerare uno qualunque dei cinque poliedri regolari il quale abbia S spigoli, F faccie m-latere, V vertici con angoli solidi n-lateri, il poliedro ritornerà in sè stesso ogni volta che porteremo uno spigolo fisso a coincidere con un altro arbitrario, e questo può farsi in due modi diversi; oppure una faccia fissa con una arbitraria il che si può fare in m modi diversi, od un vertice fisso in un vertice arbitrario il che può avvenire in n modi differenti. Si ha quindi:

$$N = 2S = mF = nV.$$

Applicando questa formola al dodecaedro si ha $N = 60$. Queste 60 rotazioni vanno ripartite rispetto agli assi nel modo seguente:

a) venti rotazioni intorno alle congiungenti i vertici opposti;

b) ventiquattro rotazioni intorno alle congiungenti i centri delle faccie opposte;

c) quindici rotazioni intorno alle congiungenti i punti medi degli spigoli opposti;

d) l'identità.

Riguardo all'angolo di rotazione dobbiamo notare che le *a*) sono rotazioni di argomento uguale a $\pm \frac{2\pi}{3}$, le *c*) sono rotazioni di argomento uguale a π. In quanto poi alle *b*) avremo che 12 di esse sono di argomento uguale a $\pm \frac{2\pi}{5}$, e le altre 12 di argomento $\pm \frac{4\pi}{5}$. Ricordando poi il modo di costruire il punto immagine di una rotazione potremo affermare che le *a*) saranno rappresentate dai vertici di un dodecaedro a faccie parallele al dato e inscritto nella sfera di raggio uguale a $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}$; le *b*) saranno rappresentate dai vertici di due

rotazioni che sovrapongono a_1 ad un altro raggio è una retta, quindi sovraponendo a_1 successivamente ai dodici raggi perpendicolari alle dodici faccie avremo dodici rette, e sostituendo ad a_1 successivamente a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, avremo in tutto 72 rette. Siccome poi una faccia può sovraporsi ad un'altra in 5 modi differenti, su ciascuna di esse si troveranno 5 punti della nostra figura. Queste 72 rette saranno evidentemente a 2 a 2 polari reciproche rispetto a S^2.

Esse saranno le 6 normali condotte per O alle sei coppie di faccie opposte del dodecaedro, i 30 spigoli del dodecaedro che forma parte della nostra figura, le 6 intersezioni delle coppie di faccie opposte di questo dodecaedro col piano all'infinito, i 30 spigoli dell'icosaedro minore. Riguardo alla posizione nello spazio dei 60 punti considerati si può notare che gli spigoli dell'icosaedro minore passano per due vertici del dodecaedro, e che i vertici dell'icosaedro maggiore sono i punti comuni ai cinque spigoli che incontrano una stessa faccia del dodecaedro.

In causa della polarità che trasforma la nostra configurazione in sè stessa, insieme alle due proprietà che abbiamo già dimostrato si verificheranno anche le due proprietà correlative, cioè:

Per ciascuno dei 60 punti che rappresentano le rotazioni che sovrapongono a sè stesso il dodecaedro passano 15 dei 60 piani considerati.

Per ciascuna delle 72 rette su cui sono disposti 5 dei medesimi punti passano 5 dei 60 piani considerati.

16. Altre proprietà di questa figura saranno le seguenti a 2 a 2 correlative:

Per ciascuno dei 60 punti passono 6 delle 72 rette.

In ciascuno dei 60 piani sono situate 6 delle 72 rette.

Esistono 200 rette su ciascuna delle quali sono situati tre dei 60 punti considerati.

Per ciascuna di queste 200 rette passano tre dei 60 piani considerati.

La prima proprietà è subito provata osservando che, se noi consideriamo una qualunque delle nostre rotazioni, per essa i raggi a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 vengono portati su altri 6 raggi, e così i loro opposti, quindi per il punto che rappresenta la rotazione devono passare 6 delle 72 rette.

Per la terza proprietà si noti che l'immagine delle rotazioni che sovrappongono un angoloide del dodecaedro dato ad un altro è una retta (quella stessa che rappresenta le rotazioni che sovrapongono le faccie corrispondenti nell'icosaedro polare). Queste rette saranno 200 e siccome un angoloide può sovraporsi ad un altro in tre modi differenti, su ciascuna retta vi saranno tre punti della nostra configurazione.

le (3) diventano

$$a = 2z \qquad b = x + y + 2z^2. \tag{5}$$

Dalle (4) e (5) risulta molto facilmente

$$x + y = b - \frac{a^2}{2} \qquad xy = \frac{a^4}{16}$$

quindi i valori delle quantità x ed y sono dati dalle radici della seguente equazione

$$v^2 - \left(b - \frac{a^2}{2}\right) v + \frac{a^4}{16} = 0\,.$$

Risulta cioè

$$x = \frac{2b - a^2 + 2\sqrt{b\,(b - a^2)}}{4} \qquad y = \frac{2b - a^2 - 2\sqrt{b\,(b - a^2)}}{4}.$$

Le quantità x ed y risulteranno razionali nel caso in cui il prodotto $b\,(b - a^2)$ è un quadrato perfetto.

Posto allora

$$b\,(b - a^2) = h^2\,, \tag{6}$$

le (1) diventano

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt[4]{\frac{2b - a^2 + 2h}{4}} + \sqrt[4]{\frac{2b - a^2 - 2h}{4}}, \tag{7}$$

$$\sqrt{-a + \sqrt{b}} = \sqrt[4]{\frac{2b - a^2 + 2h}{4}} - \sqrt[4]{\frac{2b - a^2 - 2h}{4}}, \tag{8}$$

risulta cioè che: *i radicali* $\sqrt{a + \sqrt{b}}$, $\sqrt{-a + \sqrt{b}}$, *in cui* a *e* b *sono quantità razionali, si possono decomporre rispettivamente nella somma e nella differenza di due radici quarte di quantità razionali, se il prodotto* $b\,(b - a^2)$ *è un quadrato perfetto.*

3. Allo stesso risultato si può giungere, facendo uso della nota trasformazione

$$\sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}}{2}} + \sqrt{\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}}{2}},$$

nel seguente modo:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt[4]{b}\sqrt{1 + \sqrt{\frac{a^2}{b}}} = \sqrt[4]{b}\left[\sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{a^2}{b}}}{2}} + \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{b}}}{2}}\right] =$$

$$= \sqrt[4]{b}\left[\sqrt[4]{\frac{2b - a^2 + 2\sqrt{b\,(b - a^2)}}{4b}} + \sqrt[4]{\frac{2b - a^2 - 2\sqrt{b\,(b - a^2)}}{4b}}\right]$$

ossia

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt[4]{\frac{2b - a^2 + 2\sqrt{b\,(b - a^2)}}{4}} + \sqrt[4]{\frac{2b - a^2 - 2\sqrt{b\,(b - a^2)}}{4}} \tag{9}$$

e quindi per la (6)

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt[4]{\frac{2b - a^2 + 2h}{4}} + \sqrt[4]{\frac{2b - a^2 - 2h}{4}}.$$

La (9), qualunque sia il prodotto $b\,(b - a^2)$, è sempre vera, come si può facilmente verificare, ma essa evidentemente non offre alcun vantaggio quando $b\,(b - a^2)$ non è un quadrato perfetto.

Analogamente si dimostrerebbe la (8).

e quindi le radici dell'equazione (13), nel caso in cui risulti soddisfatta la relazione (6), sono

$$\pm\left[\sqrt[4]{\frac{p^2+2q+2k}{4}}+\sqrt[4]{\frac{p^2+2q-2k}{4}}\right]$$
$$\pm\sqrt{-1}\left[\sqrt[4]{\frac{p^2+2q+2k}{4}}-\sqrt[4]{\frac{p^2+2q-2k}{4}}\right]. \tag{16}$$

Analoghe considerazioni si possono fare per le equazioni

$$x^4+2px^2-q=0, \qquad x^4\pm 2px^2+q=0.$$

Esempio numerico. — Supposto $p=3$ $q=3$ risulta soddisfatta, per $k=6$, la relazione (15), quindi le radici dell'equazione

$$x^4-6x^2-3=0$$

sono

$$\pm\tfrac{1}{2}\left[\sqrt[4]{108}+\sqrt[4]{12}\right]$$
$$\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\left[\sqrt[4]{108}-\sqrt[4]{12}\right].$$

SALVATORE COMPOSTO.

PICCOLE NOTE

Sulle formule fondamentali della teoria delle funzioni circolari.

Quando s'abbia l'intenzione d'introdurre le funzioni circolari sulla base delle coordinate cartesiane ortogonali, si dimostri subito che *il quadrato della misura d'un segmento è uguale alla somma dei quadrati delle differenze fra le coordinate dei suoi estremi*, perchè s'avrà un mezzo semplicissimo per impiantare una formola madre, diciam così, di tutte quelle che stanno a fondamento della teoria delle funzioni circolari.

1. Dato un arco qualsiasi α e detto P il punto del cerchio trigonometrico avente per ascissa $\cos\alpha$ e per ordinata $\operatorname{sen}\alpha$, siccome le coordinate del centro sono nulle, il teorema su citato porta all'eguaglianza

$$\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha=1. \tag{1}$$

2. Ponendo

$$M \equiv (\cos m;\ \operatorname{sen} m), \qquad N \equiv (\cos n;\ \operatorname{sen} n),$$
$$M_1 \equiv [\cos(m+s);\ \operatorname{sen}(m+s)]; \qquad N_1 \equiv [\cos(n+s);\ \operatorname{sen}(n+s)];$$

con m, n, s scelti comunque nel campo dei numeri reali, le corde MN e M_1N_1 sono eguali, giacchè la seconda non è che la prima cambiata di posto. Da siffatta eguaglianza e dal teorema sul quadrato della misura d'un segmento, sopra richiamato, scende che

$$(\cos m-\cos n)^2+(\operatorname{sen} m-\operatorname{sen} n)^2=[\cos(m+s)-\cos(n+s)]^2$$
$$+[\operatorname{sen}(m+s)-\operatorname{sen}(n+s)]^2.$$

INTORNO ALLA QUISTIONE 708.

La questione 708, proposta dal prof. Catania, è la seguente:

Data la definizione di eguaglianza posta dal Veronese nella seconda edizione del suo testo di geometria e nella terza edizione della seconda parte, si domanda se sia possibile dimostrare che in due figure eguali a tre punti allineati dell'una corrispondano tre punti allineati dell'altra.

L'egregio proponente esclude che si faccia uso della definizione, contenuta nella prima parte della terza edizione del testo suddetto. Osservo però che tale definizione non diversifica dalle altre, anche se in essa è aggiunto che i segmenti delle due figure, i quali hanno estremi corrispondenti, sieno *corrispondenti*. È questo un di più, posto evidentemente dall'illustre autore per maggior chiarezza (si tratta d'un libro scolastico); perchè la corrispondenza dei segmenti suddetti è necessaria conseguenza della corrispondenza univoca che ha luogo fra i punti delle due figure rettilinee. Fra i punti di queste, infatti, non può aver luogo una corrispondenza diversa da quella che può considerarsi in esse fra i punti di tutti i segmenti eguali, che hanno gli estremi corrispondenti.

Riguardo poi alla questione proposta, osservo ch'essa è trattata nel testo del Veronese alle pagg. 23 e 24 della prima parte della terza edizione. La dimostrazione ch'ivi ne è data non è, parmi, molto chiara, a cagione di qualche omissione; ma può chiarirsi, e rendersi forse migliore, modificandola, nella sua prima parte, così:

Sieno A, B, C tre punti in linea retta di una delle due figure eguali, ed A', B', C' i loro corrispondenti dell'altra. Se le due figure sono rettilinee e se C è compreso fra A e B, al segmento AB corrispondendo il segmento uguale A'B', a C corrisponderà, per il postulato del segmento rettilineo, dato a pag. 11, un punto C'', interno al segmento A'B', per modo da avere $A'C'' = AC$, $C''B' = CB$. — Poichè la corrispondenza fra le due figure eguali è univoca, il punto C' non potrà che coincidere con C''.

Adunque i punti A', B', C' sono in linea retta, e si seguono nello stesso ordine dei loro corrispondenti A, B, C.

Treviso, 5 marzo 1906.

Prof. R. Grilli.

QUISTIONI PROPOSTE

717. Trovare l'equazione in coordinate cartesiane della curva i punti della quale hanno per coordinate

$$\begin{cases} x = \dfrac{a^2 - b^2}{a}\left(\frac{3}{2}\cos\varphi - \cos^3\varphi\right) \\ y = \dfrac{a^2 - b^2}{b}\left(\frac{3}{2}\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}^3\varphi\right). \end{cases}$$

Studiare questa curva mostrando in particolare che la sua area è equivalente a quella della sviluppata dell'ellisse i cui semiassi sono a e b.

dell'Esposizione Internazionale di Milano 1906

Per iniziativa del noto periodico, *Il Monitore Tecnico*, e sotto i suoi auspicî, la Società Editrice Tecnico-Scientifica di Milano pubblicherà una apposita Rivista illustrata dell' Esposizione, la quale sarà edita fra il maggio ed il dicembre di quest'anno sotto il titolo speciale di: **Rassegna Tecnica dell' Esposizione Internazionale di Milano 1906.**

Tale pubblicazione comprenderà almeno venti fascicoli, ciascuno circa di quaranta pagine di testo nel formato di cent. 21 × 31 tutti riccamente illustrati colla riproduzione di nitidi disegni e di interessanti fotografie e con copertina artistica policroma, riproducente un geniale disegno del' Dudovich.

Ciascnn fascicolo sarà dedicato ad una determinata specialità della mostra e costituirà come una speciale monografia a sè, mentre il complesso dei varî fascicoli costituirà una rassegna tecnica armonica e completa della importante manifestazione artistica ed industriale.

Detta **Rassegna** tratterà i seguenti punti principali:

Per la parte descrittiva generale dell'Esposizione: Cenni generali sulla Mostra — Gli Edifici della Esposizione dal lato costruttivo ed architettonico — Galleria del Sempione — Impianti tecnici generali dell' Esposizione.

Per la parte descrittiva delle singole mostre: Strade ordinarie — Automobilismo e Ciclismo — Strade Ferrate (Corpo stradale - Armamento e Segnali) — Materiale mobile ferroviario — Trazione elettrica ferroviaria e tramviaria — Tramvie e ferrovie speciali — Legislazione, amministrazione ed economia ferroviaria — Areonautica — Telegrafia — Telefonia — Nave mercantile e Nave da guerra (Costruzione della nave - Impianti e servizi speciali - Apparecchi motori) — Costruzione, impianti ed arredamenti portuali — Fari — Segnalazioni marittime — Navigazione fluviale — Architettura — Arte decorativa — Igiene — Assistenza — Previdenza — Galleria del lavoro — Agraria — Industria e macchine agricole — Bonifiche e irrigazione — Metrologia — Mostre diverse e temporanee — Varietà — Concorsi e Congressi tecnici.

Per tale pubblicazione il *Monitore Tecnico* si è assicurata la collaborazione di una eletta schiera di tecnici, i quali si occuperanno di trattare le diverse materie comprese nei successivi fascicoli suddividendosi il lavoro in rapporto alla particolare competenza di ciascuno nei varî rami di tecnicismo speciale; e i nomi di questi collaboratori costituiscono la garanzia migliore del valore tecnico-scientifico che la nuova pubblicazione dovrà radunare.

I venti fascicoli saranno posti separatamente in vendita al prezzo di almeno L. 1,50 cadauno — prezzo che potrà aumentare per i fascicoli di maggior mole — e l'abbonamento al complesso dei venti fascicoli viene aperto al prezzo di L. 20 nel Regno e L. 25 per l'estero.